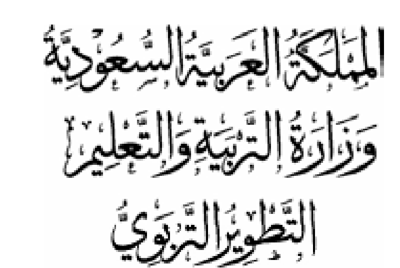




قـــررت وزارة التربية والتعليـــم تدريس

الرِّياضيَّات

للصف الثالث الثانوي

الفصل الدراسي الثاني
قسم العلوم الطبيعية
(بنين)

تأليف :

د. سلمان عبدالرحمن السلمان
د. محمد عبدالرحمن القويز
د. عبدالله محمد الراشد
د. فوزي أحمد الذكير

د. صالح السنوسي
أ. محمد أمين شاكر
د. محمد عبدالرحمن القاضي
أ. فاروق عبدالرزاق الحدبان

طبعة ١٤٢٨هـ ـ ١٤٢٩هـ
٢٠٠٧م ـ ٢٠٠٨م

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر
السعودية، وزارة التربية والتعليم
الرياضيات : للصف الثالث الثانوي : قسم العلوم الطبيعية - الفصل الدراسي الثاني - ط ٥ - الرياض.
٢٧٠ ص ؛ ٢١x٢٣ سم
ردمك : ٨ - ٢٢٨ - ١٩ - ٩٩٦٠ (مجموعة)
٤ - ٢٣٠ - ١٩ - ٩٩٦٠ (جـ٢)
١ ـ الرياضيات ـ كتب دراسية
٢ ـ السعودية - التعليم الثانوي ـ كتب دراسية. أ ـ العنوان
ديوي ٧١٢، ٥١٠ ٢١٨٤ / ١٩

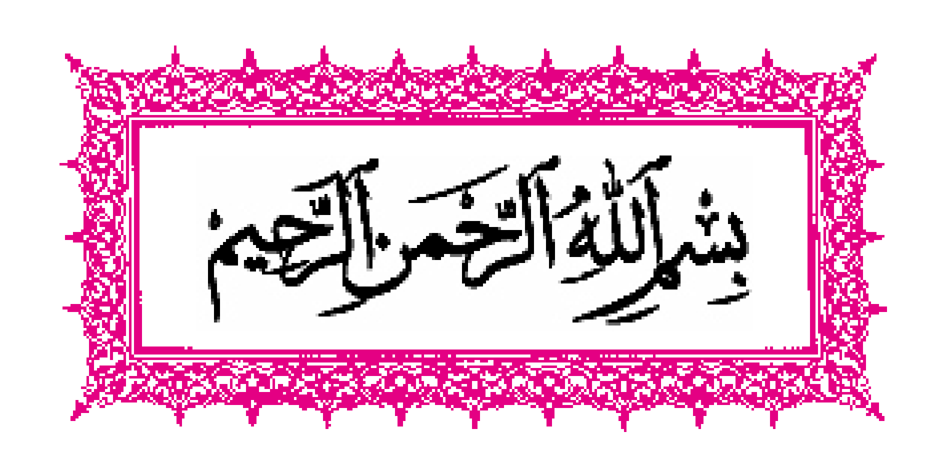
لهذا الكتاب قيمة مهمّة وفائدة كبيرة فلنحافظ عليه ولنجعل نظافته تشهد على حسن سلوكنا معه...

إذا لم نحتفظ بهذا الكتاب في مكتبتنا الخاصة في آخر العام للاستفادة فلنجعل مكتبة مدرستنا تحتفظ به...

موقع الوزارة
www.moe.gov.sa

موقع الإدارة العامة للمناهج
www.moe.gov.sa/curriculum/index.htm

البريد الإلكتروني للإدارة العامة للمناهج
curriculum@moe.gov.sa


بسم الله الرحمن الرحيم



مقدمة

الحمد لله وحده، والصلاة والسلام على من لا نبي بعده، سيدنا محمد وعلى آله وصحبه.

أما بعد.

فإننا نقدّم إلى أبنائنا طلبة الشهادة الثانوية (قسم العلوم الطبيعية) الجزء الثاني من كتاب الرياضيات؛ وهو الكتاب الأخير من سلسلة كتب الرياضيات التي قمنا بتأليفها لطلبة المرحلة الثانوية وفق المنهج الجديد الذي اعتمدته وزارة التربية والتعليم، والذي تمت مناقشته في ندوة ضمت ممثلين لأقسام الرياضيات في كليات العلوم والتربية بالجامعات السعودية، كما ضمت عدداً من المربين والباحثين والميدانيين (من موجهين ومدرسين) من مناطق مختلفة من المملكة، وذلك في الفترة ٩ - ١٠ جمادى الآخرة لعام ١٤٠٦هـ؛ وقد كانت الندوة متوجةً لأعمال لجان ودراسات واستبانات واستطلاعات ميدانية.

يتألف الكتاب من أربعة أبواب هي :

الباب الخامس : تطبيقات حساب التفاضل.

الباب السادس : حساب التكامل.

الباب السابع : تطبيقات حساب التكامل.

الباب الثامن : الهندسة الفراغية (٢).

وقد توخَّينا في هذا الكتاب - كالكتب الخمسة التي سبقته - عرض المفاهيم بشكل يساعد الطالب على التعلم الذاتي، فأكثرنا من الأمثلة، ووضعنا تدريبات تتكوَّن من تطبيقات مباشرة تساعد المعلم على التعليم والتقويم وتساعد الطالب على التعلّم. وكبقية الكتب السابقة لهذا الكتاب، فإن هذه الطبعة تعتبر تجريبية، وأملنا أن تصلنا من إخواننا الميدانيين ملحوظاتهم مفصّلة، عن طريق الإدارة العامة للمناهج بوزارة التربية والتعليم، شاكرين لهم تعاونهم البناء؛ وآخر دعوانا أن الحمد لله رب العالمين، وصلى الله على سيدنا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين.

الرياض في ٥ صفر ١٤١٥هـ

المؤلفون

الفهـــــــــرس

الباب الخامس : تطبيقات حساب التفاضل :

الباب السادس : حساب التكامل :

الباب السابع : تطبيقات حساب التكامل المحدد :

الباب الثامن : الهندسة الفراغية (٢) :

الباب الخامس

تطبيقات حساب التفاضل

مقـدمـة:

٥ ـ ١ القيم العظمى والصغرى.

٥ ـ ٢ القيم العظمى والصغرى المحلية.

٥ ـ ٣ نظرية القيمة المتوسطة.

٥ ـ ٤ الدوال المطردة ، فترات التزايد والتناقص.

٥ ـ ٥ التقعر.

٥ ـ ٦ تصنيف النقاط الحرجة.

٥ ـ ٧ رسم المنحنيات (حالة كثيرات الحدود).

٥ ـ ٨ مسائل القيم القصوى التطبيقية.

مقدمة :

إن قابلية الدالة للاشتقاق على فترة تزودنا بقدرة كبيرة على استنباط سلوكها على هذه الفترة، ولهذا أثر بالغ في التنبؤ بالنتائج العلمية عند استخدام حساب التفاضل في تطبيقاته المتعددة في الفيزياء والفلك، والعلوم، والهندسة، والاقتصاد...

٥ ـ ١ القيم العظمى والصغرى

في نهاية باب سابق تعرفنا على مفهوم القيم القصوى لدالة على فترة؛ حيث نقول إن للدالة د قيمة عظمى على الفترة ف إذا وجدت حـ ∈ ف بحيث:

$$د(حـ) \geq د(س) \text{ لكل } س \in ف.$$

ونقول إن للدالة د قيمة صغرى على ف إذا وجدت حـ ∈ ف بحيث:

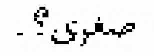
$$د(حـ) \leq د(س) \text{ لكل } س \in ف.$$

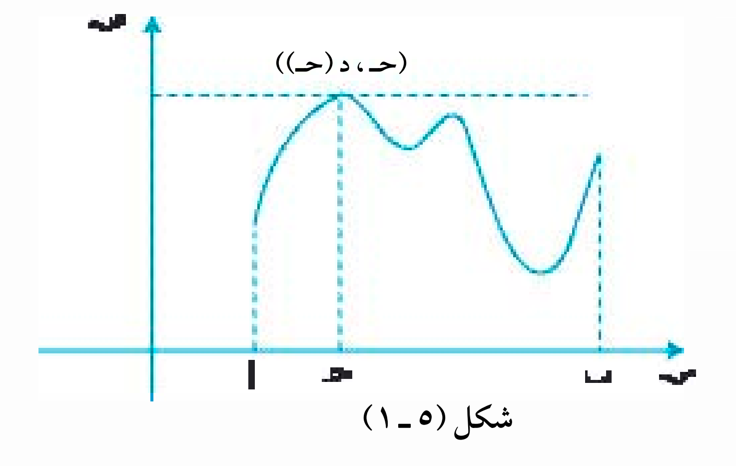
ونسمي كلاً من القيمة العظمى والصغرى **قيمة قصوى**.

ينصرف جهدنا في هذا البند إلى كيفية تحديد أين تحقق دالة قيمها القصوى على فترة ما (إن كانت لها قيم قصوى). لنبدأ بتذكير أنفسنا بالملحوظات التالية:

ملحوظات (٥ ـ ١)

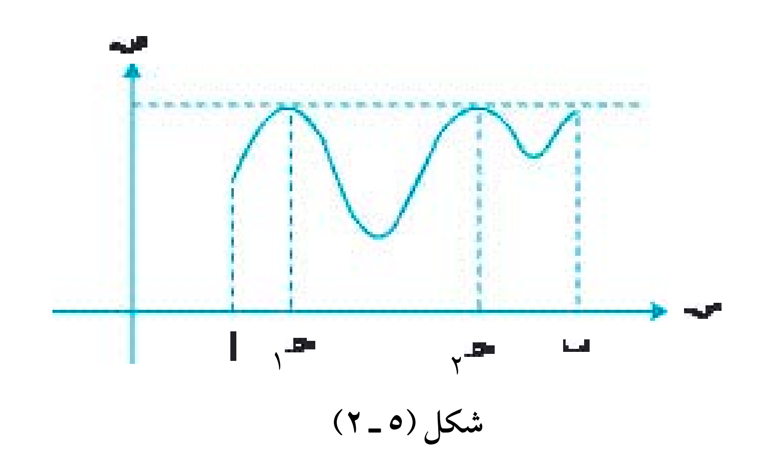
(١) إذا كانت د(حـ) قيمة عظمى للدالة د على الفترة ف فإن الرسم البياني للدالة د لا يحتوي نقطة أعلى من (حـ، د(حـ)). انظر الشكل (٥ ـ ١). ماذا تقول لو كانت د(حـ) قيمة


صغرى؟ .



شكل (٥ ـ ١)

(٢) قد تحقق الدالة قيمتها العظمى (أو الصغرى) على ف عند أكثر من نقطة



شكل (٥ ـ ٢)

فالدالة في الشكل (٥ ـ ٢) تحقق قيمتها العظمى عند كل من $حـ_{١}$ ، $حـ_{٢}$ ، ب.

(٣) قد تعجز الدالة د عن تحقيق قيمة عظمى أو صغرى على ف . هل تستطيع أن تقدم مثالاً على ذلك؟

(٤) إذا كانت الفترة ف مغلقة والدالة د متصلة فإنَّ للدالة د قيمة عظمى وقيمة صغرى على ف .

مثال (٥–١)

أوجد القيمتين العظمى والصغرى للدالة .

$د(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} + ٩س$ على الفترة [− ١ ، ٣].

الحـــل :

بما أن د كثيرة حدود فهي متصلة، وبما أنَّ الفترة مغلقة فإنَّ د تحقق قيمتها العظمى والصغرى على [− ١ ، ٣] .

الشكل (٥-٣) يوضح الرسم البياني للدالة د على [-١ ، ٣] من الشكل نستنتج أنَّ:

(أ) قيمة د العظمى هي ٤ وتتحقق عندما س = ١

(ب) قيمة د الصغرى هي -١٦ وتتحقق عندما س = -١ .

في هذا المثال استعنا بالرسم لتحديد القيم القصوى، ولكن في أحيان عديدة لا يكون هذا متاحاً لنا ولذا يجب أن نبحث عن طريقة أخرى تعيننا على تحديد القيم القصوى.

شكل (٥ ـ ٣)

نظرية (٥ ـ ١)

افرض أن الدالة د تأخذ قيمة قصوى على الفترة المفتوحة ف عند حـ ∈ ف ، عندئذ إما أنَّ د غير قابلة للاشتقاق عند حـ أو أنَّ دَ(حـ) = صفراً .

البرهان : سنكتفي بإثبات الحالة التي تكون فيها د(حـ) قيمة عظمى ونترك أمر تعديل البرهان في حالة د(حـ) قيمة صغرى للطالب كتدريب .

افرض أنَّ د قابلة للاشتقاق عند حـ ،

سنثبت أن دَ(حـ)= صفراً .

من التعريف:

$$دَ(حـ) = \lim_{س \to حـ} \frac{د(س) - د(حـ)}{س - حـ}$$

بما أنَّ الفترة ف مفتوحة فبإمكاننا الاقتراب من حـ من اليمين أو من اليسار بقيم للمتغير س تقع في ف . إذا كانت س تقع على يمين حـ فإنَّ (س - حـ) عدد موجب، وعليه فإن الكسر

$\frac{د(س) - د(ح)}{س - ح}$ غير موجب (إذ أن د(ح) ≤ د(س)) ، من هذا نرى أن :

$\lim_{س \to ح^+} \frac{د(س) - د(ح)}{س - ح} \geq$ صفراً.

وعليه فإنَّ : دَ(ح) ≥ صفراً. (١)

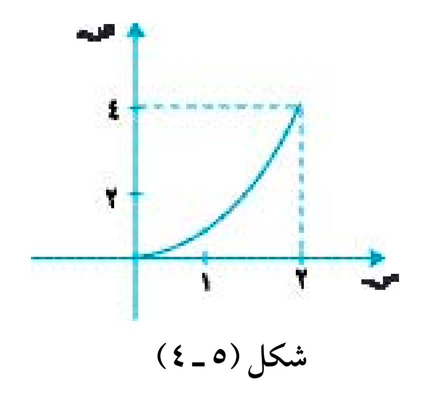
كذلك إذا كانت س عن يسار ح فإن (س − ح) عدد سالب وعليه فالكسر $\frac{د(س) - د(ح)}{س - ح}$

غير سالب الأمر الذي يعني أن $\lim_{س \to ح^-} \frac{د(س) - د(ح)}{س - ح} \leq$ صفراً.

أي أنَّ: دَ(ح) ≤ صفراً. (٢)

من المتباينتين (١) ، (٢) نخلص الآن إلى أنَّ دَ(ح) = صفراً.

ملحوظات (٥ ـ ٢)



شكل (٥ ـ ٤)

(١) من الضروري ، في النظرية (٥ ـ ١) ، ألاَّ تكون ح أحد حدي الفترة قيد البحث (لذا ذكرنا أن ف فترة مفتوحة). خذ ف لتكون الفترة [٠ ، ٢] ، د(س) = س٢ . عندئذ للدالة د قيمة عظمى عند س = ٢ مع أن دَ(٢) = ٤

(٢) النظرية (٥ ـ ١) تؤكد أنه عند البحث عن النقاط التي تحقق عندها الدالة قيمها القصوى على فترة مفتوحة، يكفي أن نقصر النظر على النقاط التي لا يكون للدالة عندها مشتقة أو المشتقة عندها تساوي صفراً. مثل هذه النقاط تسمى نقاطاً حرجة.

لنعد الآن إلى المثال (٥ ـ ١) وندرسه في ضوء النظرية (٥ ـ ١) ، هنا

د(س) = س٣ − ٦ س٢ + ٩ س والمطلوب قيم د القصوى على الفترة [−١ ، ٣].

هذه القيم تتحقق إما عند طرفي الفترة [-١ ، ٣]، أو عند نقاط تنتمي إلى الفترة المفتوحة (-١ ، ٣).

من النظرية (٥ - ١) إن تحققت قيمة قصوى للدالة د في (-١ ، ٣). فهي تتحقق بالضرورة عند نقطة حرجة. على هذا نقصر البحث عن النقاط التي تتحقق عندها القيم القصوى على [-١ ، ٣] ونقاط د الحرجة في الفترة (-١ ، ٣).

الآن د قابلة للاشتقاق في كل مكان (لماذا؟) وعليه فنقاطها الحرجة هي تلك التي عندها المشتقة تساوي صفراً.

دَ(س) = ٣ س^{٢} - ١٢ س + ٩

للنقاط الحرجة نضع دَ(س) = صفراً.

أي ٣(س^{٢} - ٤ س + ٣) = صفراً.

(س - ٣) (س - ١) = صفراً.

إذن س = ٣ أو س = ١.

على هذا فإنّ ١ هي النقطة الحرجة الوحيدة في (-١ ، ٣). من هذا نستنتج أنّ القيم القصوى تتحقق في المجموعة {-١ ، ٣ ، ١}.

الآن: د(-١) = -١٦، د(٣) = صفراً، د(١) = ٤

إذن القيمة العظمى تتحقق عند ١ وقيمتها ٤ والقيمة الصغرى تتحقق عند -١ وقيمتها = -١٦.

مثال (٥−٢)

عيّن القيم القصوى للدالة .

د(س) = ٢ س^{٣} − ٣ س^{٢} − ١٢ س + ٥

على الفترة [− ٢ ، ٣] .

الحـــل :

تتحقق القيم القصوى إمّا عند طرفي الفترة [− ٢ ، ٣] أو عند نقاط حرجة للدالة د في الفترة المفتوحة]− ٢ ، ٣[وبما أنّ د قابلة للاشتقاق في كل مكان فيكفي للحصول على النقاط الحرجة أن نضع دَ(س) = صفراً.

الآن، دَ(س) = ٦ س^{٢} − ٦ س − ١٢

فنضع ٦ س^{٢} − ٦ س − ١٢ = صفراً.

أي ٦ (س^{٢} − س − ٢) = صفراً.

أي (س − ٢) (س + ١) = صفراً.

نستنتج أنّ نقاط د الحرجة في]− ٢ ، ٣[هي عند ٢ ، − ١ ، وأنّ قيم د القصوى تتحقق عند نقاط في المجموعة {− ٢ ، ٣ ، ٢ ، − ١} : د(− ٢) = ١ ، د(٣) = − ٤ ، د(٢) = − ١٥ ، د(− ١) = ١٢ ، فتكون القيمة العظمى هي ١٢ (وتتحقق عند س = − ١) والقيمة الصغرى هي − ١٥ (وتتحقق عند س = ٢).

تدريب (٥−١)

عيّن القيم القصوى للدالة د الواردة في المثال (٥ − ٢) على الفترة [٠ ، ٣].

مثال (٥-٣)

عيّن القيم القصوى للدالة

$د(س) = ٣ س^{\frac{٢}{٣}} - ٢ س$

على الفترة [− ١ ، ٨]

الحــل :

القيم القصوى تتحقق عند نقاط من المجموعة المكوّنة من أطراف الفترة [− ١ ، ٨] ونقاط د الحرجة في الفترة (− ١ ، ٨)

$$دَ(س) = ٢ س^{-\frac{١}{٣}} - ٢ = \frac{٢}{س^{\frac{١}{٣}}} - ٢ = \frac{٢(١ - س^{\frac{١}{٣}})}{س^{\frac{١}{٣}}}$$

المشتقة غير معرفة عندما س = صفراً، وعليه فعند الصفر نقطة حرجة .
كذلك دَ(س) = صفراً عندما س = ١ وعليه فعند ١ نقطة حرجة أيضًا . من هنا نستنتج أن القيم القصوى تتحقق في المجموعة {−١ ، ٨ ، ٠ ، ١} .

الآن : د(− ١) = ٥ ، د(٨) = − ٤ ، د(٠) = صفراً، د(١) = ١ إذن القيمة العظمى هي ٥ وتتحقق عند − ١ والقيمة الصغرى هي − ٤ وتتحقق عند ٨.

تمارين (٥ – ١)

في التمارين من (١) إلى (٦) احسب قيم الدالة د القصوى على الفترة ف .

(١) $د(س) = ٣ - ٦س^{٢} - ٢س$. ف = [−٣ ، ٢]

(٢) $د(س) = س^{٢} - ٨س + ١٥$. ف = [٠ ، ٥]

(٣) $د(س) = ٤س - ٥$. ف = [−١ ، ٣]

(٤) $د(س) = ٢س^{٣} - ٣س^{٢} - ١٢س + ١$. ف = [−٢ ، ١]

(٥) $د(س) = \frac{س^{٤}}{٤} \quad س^{٣} + س^{٢} + ٢$. ف = [٠ ، ٢]

(٦) $د(س) = ٣س^{\frac{٢}{٣}} - ٢$. ف = [−١ ، ١]

في التمارين التالية أوجد نقاط د الحرجة :

(٧) $د(س) = ٢س^{٣} + س^{٢} - ٢٠س + ٤$.

(٨) $د(س) = \frac{س^{٢} + ١}{س^{٢} + ٤}$

(٩) $د(س) = س^{\frac{١}{٣}}(س^{٢} - ٨)$

(١٠) $د(س) = \frac{س^{٢}}{٥س + ٤}$ ، $(س \neq -\frac{٤}{٥})$

(١١) $د(س) = س^{٢}(س + ١)^{\frac{١}{٣}}$

٥ - ٢ القيم العظمى والصغرى المحلية

قمنا في البند السابق بدراسة قيم الدالة القصوى على فترة معيّنة مسبقًا، والآن نتعرض بالتعريف لمفهوم جديد:

تعريف (٥ ـ ١)

لتكن حـ في مجال الدالة د

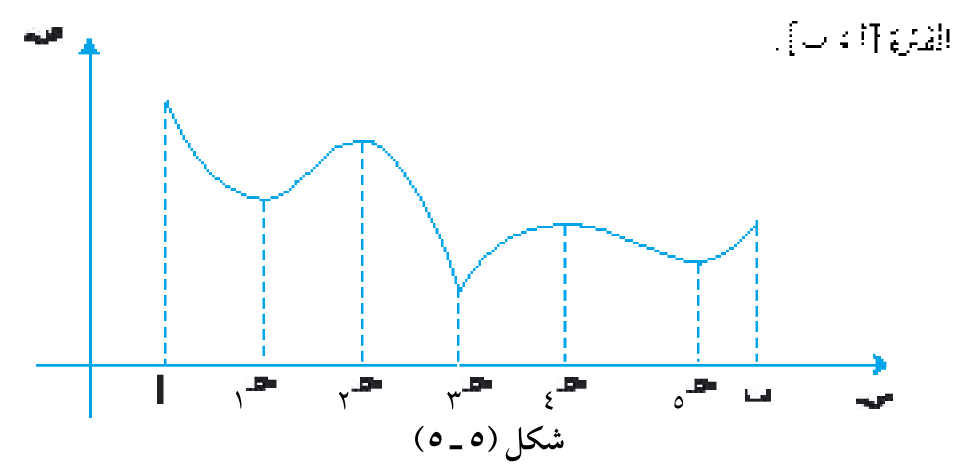
(أ) نقول إن للدالة د قيمة عظمى محلية عند حـ إذا وجدت فترة مفتوحة ف تحتوي حـ بحيث يكون: د(حـ) ≥ د(س) لكل س ∈ ف

(ب) نقول إنّ للدالة د قيمة صغرى محلية عند حـ إذا وجدت فترة مفتوحة ف تحتوي حـ بحيث يكون: د(حـ) ≤ د(س) لكل س ∈ ف

ملحوظات (٥ ـ ٣)

(١) التقرير بأن للدالة د قيمة قصوى محلية عند حـ يعني أنه إذا قصرنا النظر على فترة مفتوحة صغيرة تحتوي حـ فإننا نجد أن للدالة د قيمة قصوى على هذه الفترة، وهذا هو سر التسمية «محلية» فهنا نحن لا ننظر للصورة الكاملة على مجال الدالة وإنما نركز على ما يحدث حول حـ وبالقرب منه.

(٢) الرسم أدناه يبيّن بعض النقاط التي تتحقق عندها قيم قصوى محلية للدالة د المعرفة على الفترة [أ ، ب].



شكل (٥ ـ ٥)

للدالـة قيمة صغـرى محلية عنـد حـ٢ وهـذا واضـح إذا قصرنا النظـر مثلاً على الفترة (٠ ، حـ٣)

لاحظ أنه إذا وسعنا النظر إلى (أ ، حـ٣) مثلاً فلن يكون للدالة قيمة صغرى محلية عند حـ٢.

للدالة قيمة صغرى محلية عند حـ٢ وقيم عظمى محلية عند كل من حـ١ ، حـ٣.

ماذا تلاحظ عن القيمة الصغرى المحلية د(حـ٢) والقيمة العظمى المحلية د(حـ٣)؟

(٣) نسمّي أحياناً القيمة القصوى المحلية قيمة قصوى نسبية وكذلك يسمّي البعض القيمة القصوى على فترة معطاة مطلقاً ـ كما ورد في البند السابق ـ قيمة قصوى مطلقة.

(٤) حسب التعريف (٥ ـ ١) تكون القيمة القصوى المحلية هي قيمة قصوى (مطلقة) على فترة مفتوحة ما. وعلى هذا تحقق الدالة شروط النظرية (٥ ـ ١) فنستخلص ما يأتي:

نظرية (٥ ـ ٢)

إذا كان للدالة د قيمة قصوى محلية عند حـ فإن حـ نقطة حرجة للدالة د.

يتبادر إلى الذهن سؤالان مرتبطان بالنظرية (٥ ـ ٢).

الأول هو: هل كل نقطة حرجة تقود لقيمة قصوى محلية؟

والثاني هو: متى تعطي النقطة الحرجة قيمة عظمى محلية ومتى تعطي قيمة صغرى محلية؟

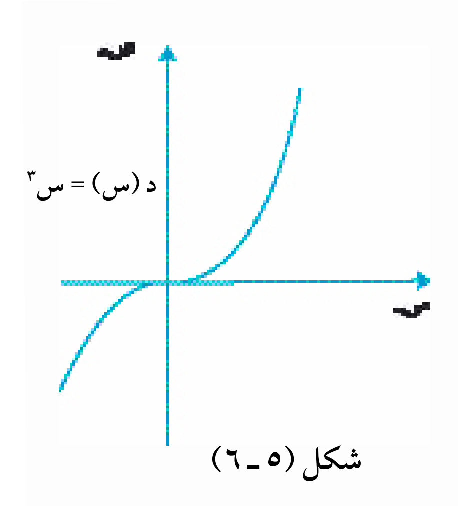
الإجابة على السؤال الأول بالنفي والمثال التالي يوضح الأمر:

خذ: د(س) = س^{٣}



عندئذٍ $د(س) = ٣ س^٢$

وعليه فمن الواضح أن س = صفراً نقطة حرجة للدالة د ، لأن $د(٠) =$ صفراً ، بينما د(س) عن يمين الصفر موجبة وعن يسار الصفر سالبة (انظر الشكل (٥ ـ ٦)) ، على هذا فإنَّ د(٠) لا يمكن أن تكون قيمة قصوى محلية .



شكل (٥ ـ ٦)

أما فيما يتعلق بالسؤال الثاني فإننا نلاحظ عدم استطاعتنا الاستفادة من الأسلوب الوارد في البند السابق لتحديد القيم القصوى المطلقة ، فالآن ليست لدينا فترة مغلقة مسبقاً لنجرّب عند أطرافها ، ونقاط الدالة الحرجة بداخلها ، سنخصص جزءاً من نشاطنا المقبل للإجابة على هذا السؤال وذلك بعد أن نكون قد جهزنا بعض النظريات المفيدة في البند القادم . أما الآن فنختتم هذا البند بالملحوظة التالية :

ملحوظة (٥ ـ ٤)

إذا كانت للدالة المتصلة د نقطة حرجة وحيدة حـ على الفترة ف وكانت د(حـ) قيمة قصوى محلية ، فإن د(حـ) قيمة قصوى مطلقة على ف . لتقتنع بمعقولية هذه الملحوظة ما عليك إلا أن تبدأ برسم بياني دالة لها ، مثلاً ، قيمة عظمى محلية عند حـ وتحاول ما استطعت أن توصل إلى نقطة (هـ ، د(هـ)) أعلى من (حـ ، د(حـ)) دون المرور بنقطة قيمة صغرى محلية .

تماريـن (٥ – ٢)

(١) أثبت أن س = صفراً نقطة حرجة لكل من الدوال التالية ، ثم قرر بالرسم إن كانت للدالة قيمة قصوى محلية عند الصفر:

(أ) $د(س) = ٣ - س^{٢}$

(ب) $د(س) = ٢س^{٢} + ١$

(جـ) $د(س) = س^{\frac{١}{٣}}$

(د) $د(س) = |س|$

(٢) يبدو من الشكل (٥ ـ ٥) أن القيم العظمى المحلية والصغرى المحلية تأتي بالتبادل .

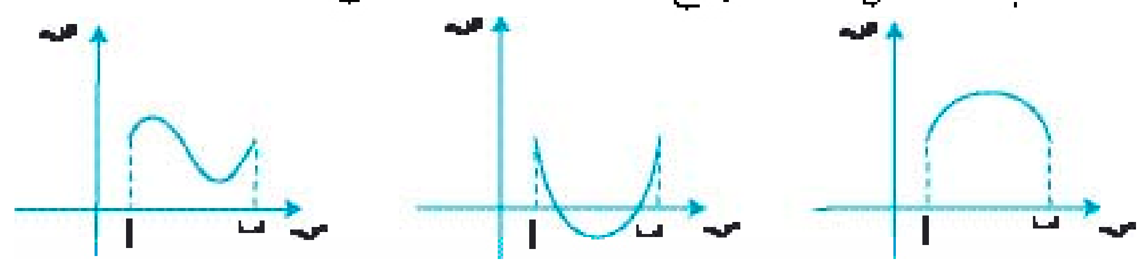
أعط بالرسم مثالاً لدالة غير ثابتة لها قيمة صغرى محلية تعقبها قيمة صغرى محلية .

٥ - ٣ نظرية القيمة المتوسطة

لقد رأينا فيما سبق الدور المهم الذي تلعبه النقاط الحرجة في تحديد قيم الدالة القصوى ؛ ونتساءل الآن : متى نضمن وجود نقطة حرجة للدالة في فترة معينة ؟

النظرية التالية والتي يعود الفضل في وضعها للرياضي الفرنسي ميشيل رول (١٦٤٢ ـ ١٧١٩ م) تعطينا شروطًا كافية لوجود نقطة حرجة واحدة على الأقل في فترة معينة .

النظرية تتناول دالة د متصلة على الفترة [أ ، ب] ، قابلة للاشتقاق على (أ ، ب) وتحقق د(أ) = د(ب) . الشكل (٥ ـ ٧) يوضح بعض الدوال من هذا النوع .



شكل (٥ ـ ٧)

هذه الرسومات تشير إلى وجود نقطة أو أكثر في الفترة [أ ، ب] يوازي عندها المماس محور س ،

هذا هو بالضبط مضمون نظرية رول .

نظرية (٥ ـ ٣) نظرية رول

إذا كانت : (١) د متصلة على الفترة [أ ، ب]

(٢) د قابلة للاشتقاق على الفترة (أ ، ب)

(٣) د(أ) = د(ب)

فإن هنالك على الأقل نقطة واحدة جـ ∈ (أ ، ب) تحقق دَ(جـ) = صفرًا .

البرهان : (غير مطلوب)

إذا كانت الدالة د ثابتة على [أ ، ب] فليس هنالك ما يحتاج منا لبرهان فنحن نعلم أن مشتقة د تساوي الصفر على (أ ، ب) وأي نقطة جـ في (أ ، ب) ستفي بالغرض .

دعنا نفترض أن د غير ثابتة على [أ ، ب].

بما أن د متصلة على فترة مغلقة فهي تحقق قيمتيها العظمى والصغرى في الفترة، ولأن نفترض أن الدالة غير ثابتة فلدينا احتمالان:

(١) توجد س ∈ [أ ، ب] بحيث د (س) > د (أ)

(٢) توجد س ∈ [أ ، ب] بحيث د (س) < د (أ)

في الحالة (١) نرى أن القيمة العظمى أكبر من د (أ) وبما أن د (أ) = د (ب) فهذا يعني أن القيمة العظمى لا تتحقق عند أي من أ أو ب وعليه فلا بد أن تتحقق في الفترة المفتوحة (أ ، ب).

في الحالة (٢) نرى أن القيمة الصغرى أقل من د (أ) وعليه أقل أيضًا من د (ب) الأمر الذي يعني أنها تتحقق في الفترة المفتوحة (أ ، ب).

من هنا نستنتج وجود نقطة حـ ∈ (أ ، ب) تحقق عندها د قيمة قصوى على (أ ، ب) وبما أن د قابلة للاشتقاق على (أ ، ب) فالنظرية (٥ ـ ١) تضمن أن دَ (حـ) = صفرًا.

تدريب (٥-٢)

(١) هات بالرسم ثلاثة أمثلة توضح أنه إذا عجزت الدالة د عن تحقيق أيٍّ من الشروط الثلاثة على [أ ، ب] فقد لا توجد حـ ∈ (أ ، ب) بحيث دَ (حـ) = صفرًا.

(٢) تحقق أن شروط النظرية شروط كافية وليست ضرورية بتقديم مثال بالرسم لدالة لا تحقق أيًّا من الشروط الثلاثة على [أ ، ب] وتحقق دَ (حـ) = صفرًا عند نقطة حـ ∈ (أ ، ب).

(٣) هل بالإمكان تبديل الشرط الأول بما يلي:

(١) د متصلة عند أ وعند ب؟

إذا كانت د قابلة للاشتقاق على (أ ، ب) فهل يمكن الاستغناء عن الشرط (١)؟

تدريب (٥-٣)

قرر فيما يلي إن كانت الدالة د تحقق شروط نظرية رول على الفترة المعطاة، ثم أوجد حـ التي تعينها النظرية في حالة توفر الشروط.

(١) د(س) = $س^٢$ − ٤ س − ٦ على [١ ، ٤]

(٢) د(س) = $\sqrt{س}$ − س على [٠ ، ١]

(٣) د(س) = | س | على [-١ ، ١]

من بين شروط نظرية رول يبدو أنّ الشرط الثالث أكثرها تقييدًا، ويحق لنا أن نتساءل إن كان بالإمكان الاستغناء عنه والحصول في الوقت نفسه على نظرية ذات عمق وفائدة

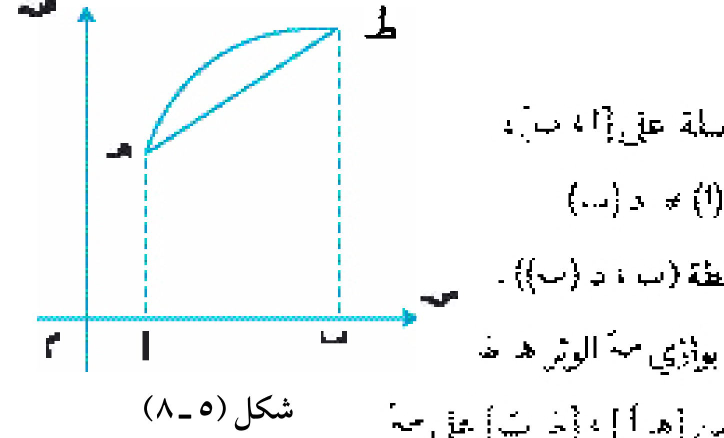
نظرية (٥ ـ ٤) نظرية القيمة المتوسطة

إذا كانت (١) د متصلة على [أ ، ب]

(٢) د قابلة للاشتقاق على (أ ، ب)

فإن هنالك نقطة واحدة على الأقل حـ ∈ (أ ، ب) تحقق دَ(حـ) = $\frac{د(ب) - د(أ)}{ب - أ}$

البرهان : (غير مطلوب)



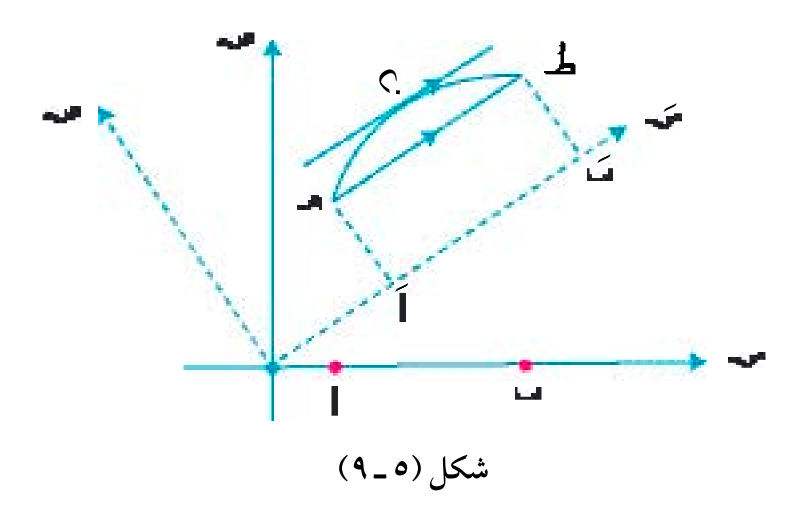
شكل (٥ ـ ٨)

الشكل (٥ ـ ٨) يوضح بيان دالة د متصلة على [أ ، ب]، وقابلة للاشتقاق على (أ ، ب) ولكن د (أ) ≠ د (ب)

هـ هي النقطة (أ ، د (أ)) و ط هي النقطة (ب ، د (ب)).

ارسم محورين جديدين سَ ، صَ بحيث يوازي سَ الوتر هـ ط

كما في الشكل (٥ ـ ٩) ثم أسقط عمودين [هـ أ] ، [ط بَ] على سَ



شكل (٥ ـ ٩)

من توازي هـ ط والمحور سَ نستنتج أن [هـ أَ] = [ط بَ] وعليه إذا نظرنا إلى الشكل مركّزين على المحورين الجديدين بدلاً من سَ، صَ ولاحظنا أن هيئة البيان لا زالت هي لدالة متصلة على [أ، ب]، وقابلة للاشتقاق على (أ، ب) فسنجد أنه لدينا الوضع نفسه الذي تناولته نظرية رول، ولذا توجد نقطة م على البيان عندها المماس يوازي محور سَ. ولما كان سَ || هـ ط فإن المماس عند م يوازي هـ ط.

لتكن حـ هي إحداثي م السيني بالنسبة للمحورين س، ص عندئذ نرى أن:

$$د'(حـ) = \text{ميل المستقيم هـ ط} = \frac{د(ب) - د(أ)}{ب - أ}$$

ملحوظة (٥ ـ ٥)

تشكل نظرية القيمة المتوسطة تعميماً لنظرية رول (تحقّق !) وتنطبق عليها الملحوظات التي تناولها التدريب (٥ ـ ٢).

تدريب (٥-٤)

قرّر ما إذا كانت الدالة $د(س) = س^٢ - س$

تحقق شرطي نظرية القيمة المتوسطة على الفترة [٠، ٣] ثم أوجد حـ التي تعيّنها النظرية في حالة توفر الشرطين.

إنّ لنظرية القيمة المتوسطة نتائج عديدة ومهمة ، وستظهر بصماتها في مجمل دراستنا القادمة نقدّم في ختام هذا البند إحدى هذه النتائج والتي ستظهر أهميتها عند دراسة حساب التكامل .

نظرية (٥ - ٥)

إذا كان $\acute{د}(س) =$ صفراً لكل $س \in (أ ، ب)$

فإن الدالة د ثابتة على $(أ ، ب)$.

البرهان :

لكل $س_1 ، س_2 \in (أ ، ب)$ بحيث $س_1 < س_2$ ، سنثبت أن $د(س_1) = د(س_2)$.

بما أن د قابلة للاشتقاق على $(أ ، ب)$ و $[س_1 ، س_2] \subset (أ ، ب)$ فإن د قابلة للاشتقاق على $]س_1 ، س_2[$ ولذا تحقق شرطي نظرية القيمة المتوسطة على $[س_1 ، س_2]$. من هذا نستنتج وجود $حـ \in]س_1 ، س_2[$ بحيث

$$\acute{د}(حـ) = \frac{د(س_2) - د(س_1)}{س_2 - س_1}$$

وبما أن $حـ \in (أ ، ب)$ فإنّ $\acute{د}(حـ) =$ صفراً وعليه

$د(س_2) - د(س_1) =$ صفراً .

أي أن $د(س_2) = د(س_1)$.

تماريـن (٥ – ٣)

في التمارين من (١) إلى (٨) قرر إن كانت د تحقق شروط رول على الفترة ف وفي حالة توافر الشروط أوجد قيمة حـ التي تعينها النظرية.

(١) د(س) = س^{٢} − ٤ س + ٣ ، ف = [٠ ، ٤]

(٢) د(س) = س^{٣} − س^{٢} − س + ١ ، ف = [−١ ، ١]

(٣) د(س) = س^{٤} − س^{٢} ، ف = [−١ ، ١]

(٤) د(س) = س^{٢} − ٦ س + ٨ ، ف = [١ ، ٥]

(٥) د(س) = س^{٢} − ٥ س + ٦ ، ف = [٢ ، ٣]

(٦) د(س) = (١ − س)(٥ − س) ، ف = [٢ ، ٤]

(٧) د(س) = س^{٣} − ٦ س^{٢} + ٩ س − ١٢ ، ف = [٠ ، ٣]

(٨) د(س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س} - ٢}$ ، ف = [−١ ، ١]

في التمارين من (٩) إلى (١٣) قرر إن كان يتوافر للدالة د شرطا نظرية القيمة المتوسطة على الفترة ف ، احسب حـ حسب مقتضى النظرية متى توافر الشرطان.

(٩) د(س) = س^{٢} − س − ٣ ، ف = [٠ ، ٣]

(١٠) د(س) = س^{٢} + س − ٤ ، ف = [−١ ، ٢]

(١١) د(س) = $\sqrt{\text{س} + ١}$ ، ف = [−١ ، ٣]

(١٢) د(س) = س + $\frac{١}{\text{س}}$ ، ف = [−١ ، ٢]

(١٣) د(س) = س + $\frac{١}{\text{س} + ١}$ ، ف = [−١ ، ٢]

(١٤) أوجد جـ التي تعينها نظرية القيمة المتوسطة للدالة .

د(س) = س^{٢} − ٣ س + ٤ على الفترة [٠ ، ١] .

ما معادلة المماس للمنحنى د الذي يوازي الوتر بين (٠ ، ٤) و (٦ ، ٢) .

(١٥) استخدم نظرية رول لإثبات أن المعادلة

٤ س^{٣} + ٥ س^{٢} − ٤ س − ٢ = صفراً

جذراً في الفترة (٠ ، ١)

(إرشاد : استخدم الدالة د(س) = س^{٤} + ٣ س^{٣} − ٢ س^{٢} − ٢ س)

(١٦) مستخدماً الدالة د(س) = $\sqrt{\text{س}}$ على الفترة [٣ ، ٤] أثبت أن

١,٧١ < $\sqrt{٣}$ < ١,٧٥

(١٧) إذا كانت د$'_{١}$(س) = د$'_{٢}$(س) على الفترة (أ ، ب) فأثبت وجود ثابت جـ ∈ ح بحيث

د$_{١}$(س) = د$_{٢}$(س) + جـ لكل س ∈ (أ ، ب) .

٥ - ٤ الدوال المطّردة ، فترات التزايد وفترات التناقص

من المؤكد أن معرفتنا أين تتزايد الدالة وأين تتناقص ستكون عونًا كبيرًا لنا متى أردنا رسم بيان الدالة . النظرية التالية ، وهي إحدى نتائج نظرية القيمة المتوسطة ، تزوّدنا بالمطلوب .

نظرية (٥ - ٦)

لتكن د دالة متصلة على [أ ، ب]

(١) إذا كانت $د'(س) > $ صفر لكل س ∈ (أ ، ب) فإن د متزايدة على [أ ، ب] .

(٢) إذا كانت $د'(س) < $ صفر لكل س ∈ (أ ، ب) فإن د متناقصة على [أ ، ب] .

البرهان :

سنكتفي بإثبات الجزء (١) ونترك للطالب إجراء التعديلات اللازمة للحصول على برهان الجزء (٢) في التمارين .

افرض أن $د'(س) > $ صفر .

لتكن $س_١ ، س_٢ \in [أ ، ب]$ بحيث $س_٢ > س_١$ ، سنثبت أنّ $د(س_٢) > د(س_١)$

بما أنّ د قابلة للاشتقاق على (أ ، ب) فهي تحقق شرطي نظرية القيمة المتوسطة على $[س_١ ، س_٢]$ ، وبمقتضى النظرية هناك $حـ \in (س_١ ، س_٢)$ تحقق :

$$د'(حـ) = \frac{د(س_٢) - د(س_١)}{س_٢ - س_١}$$

وبما أن $حـ \in (أ ، ب)$ فإن $د'(حـ) > $ صفر ، وعليه فالكسر $\frac{د(س_٢) - د(س_١)}{س_٢ - س_١}$ موجب

وبما أن المقام موجب فإننا نستنتج أنّ $د(س_٢) - د(س_١) > $ صفر ،

أي أنّ $د(س_٢) > د(س_١)$ وهو المطلوب .

مثال (٥-٤)

أوجد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة د(س) = س^٣ − ٩ س^٢ + ٢٤ س + ١ .

الحـــل :

تتزايد الدالة حيث دَ (س) موجب

وتتناقص حيث دَ (س) سالب ولذا

ينبغي علينا أن ندرس إشارة المشتقة دَ(س)

دَ (س) = ٣ س^٢ − ١٨ س + ٢٤ = ٣ (س^٢ − ٦ س + ٨)

= ٣ (س − ٢) (س − ٤) .

دَ(س) = ٠ عندما س = ٢ أو س = ٤

والشكـــل الآتي (٥ − ١٠) يبيّن لـــك

على خط الأعداد إشارة دَ (س) (راجع

الفقـرة ٦ من البنــد ٣ − ١ من الجزء

الأول من هذا الكتاب) .

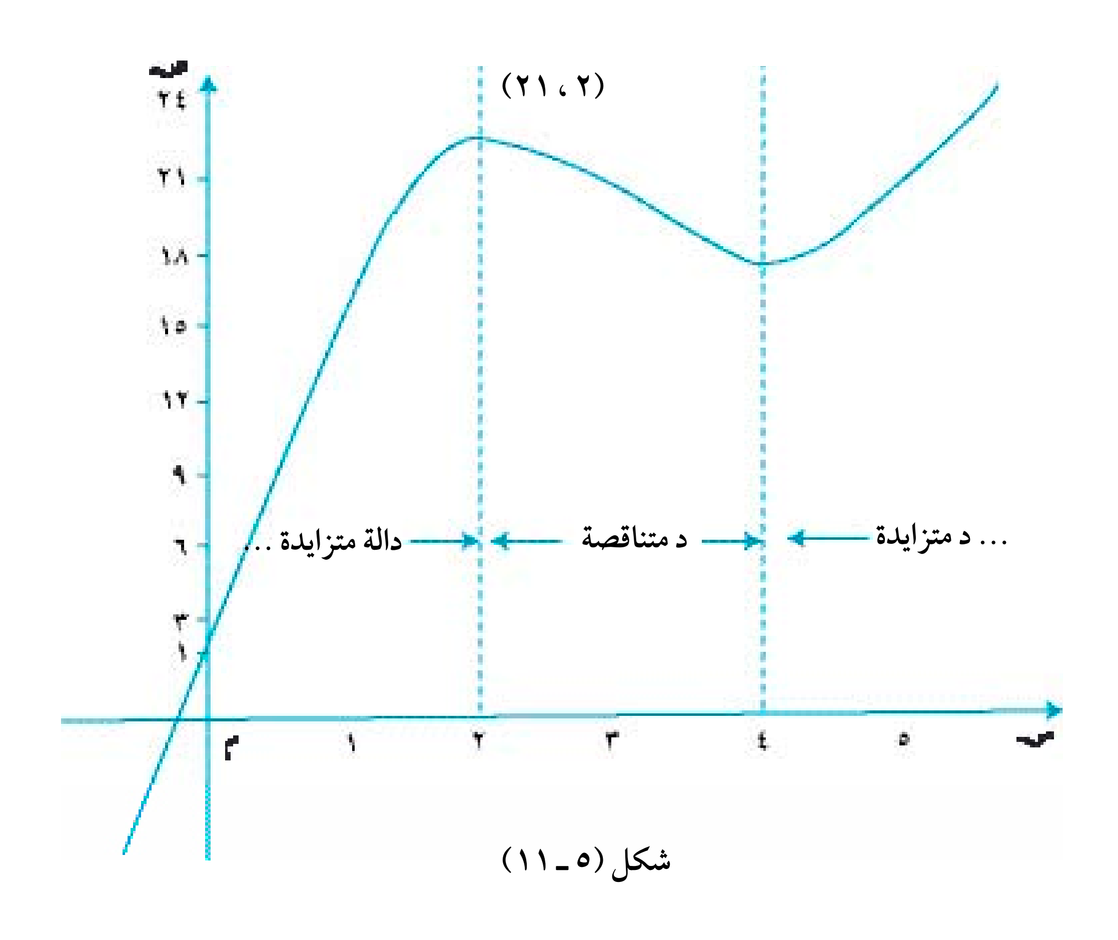
− ∞ ٢ ٤ + ∞

إشارة دَ(س): + — +

شكل (٥ − ١٠)

يتضح لذلك أن :

دَ(س) > صفر على (− ∞ ، ٢) وعلى (٤ ، ∞) وعليه فإن د متزايدة على الفترتين (− ∞ ، ٢] ، [٤ ، ∞) كذلك د متناقصة على الفترة [٢ ، ٤].



شكل (٥ ـ ١١)

تمارين (٥ – ٤)

في التمارين من (١) إلى (١٠) أوجد فترات التزايد والتناقص للدالة على مجالها. وضّح إجابتك برسم في التمارين (١) ـ (٣).

(١) $د(س) = س^{٢} - ٢س - ٣$

(٢) $د(س) = -٣ + ٦س - ٢س^{٢}$

(٣) $د(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} - ٩س + ١٢$

(٤) $د(س) = س^{٢}(٤ - س)$

(٥) $د(س) = س + \frac{١}{س}$

(٦) $د(س) = \frac{س^{٢} - ٣}{س - ٢}$

(٧) $د(س) = حاس$ ، $س \in [٠، ط]$

(٨) $د(س) = حتاس$ ، $س \in [٠، ط]$

(٩) $د(س) = ظاس$ ، $س \in (-\frac{ط}{٢}، \frac{ط}{٢})$

(١٠) $د(س) = \frac{س}{س^{٢} + ١}$

(١١) أثبت أن $جاس < س$ لكل $س \in (٠، \frac{ط}{٢}]$

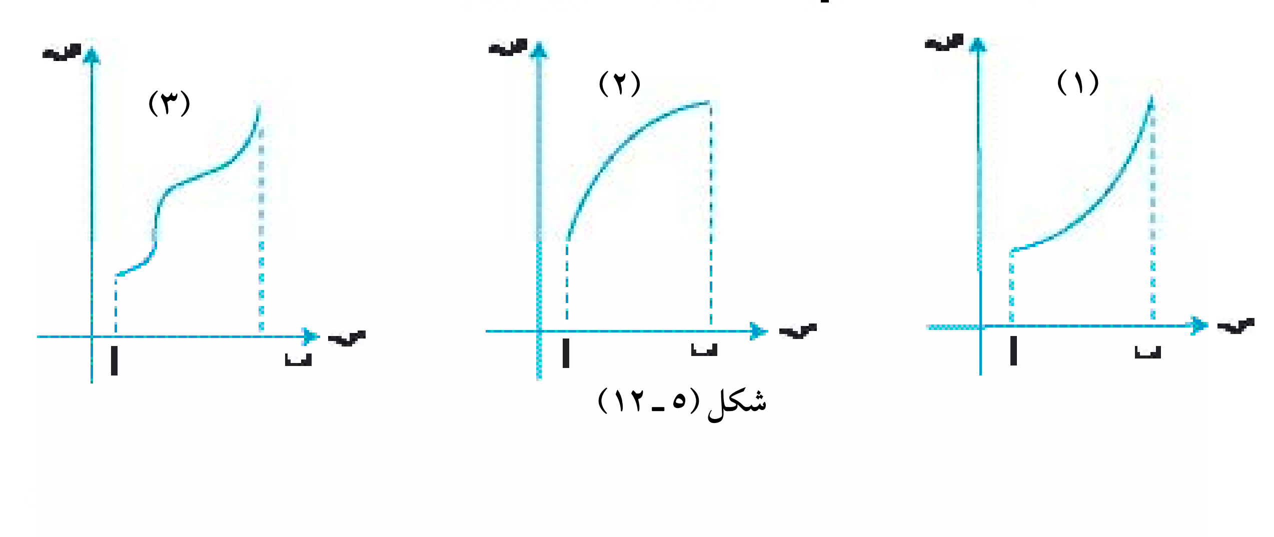
(إرشاد: ادرس تزايد الدالة $د(س) = جاس - س$)

(١٢) أورد تفاصيل برهان الجزء (٢) من النظرية (٥ ـ ٦).

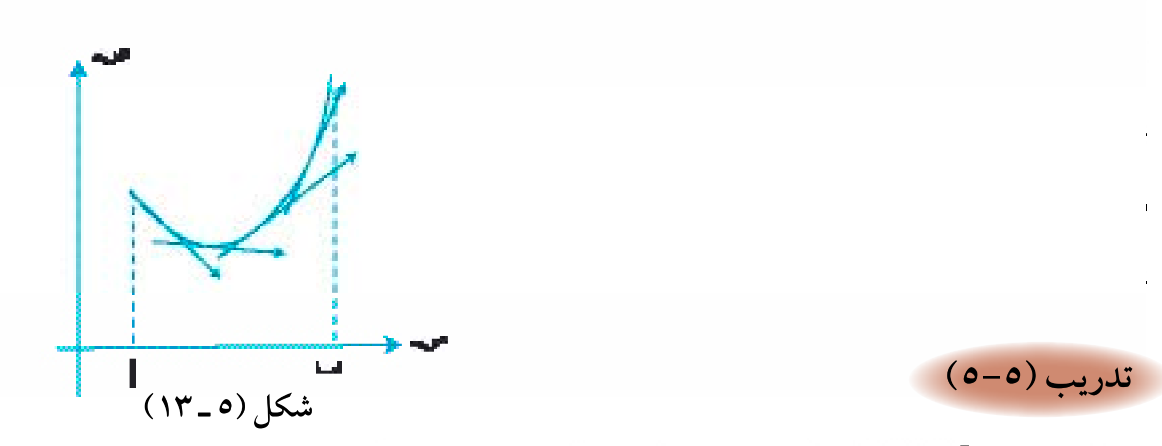
٥ - ٥ التقعّر

رأينا في البند السابق كيفية استخدام المشتقة الأولى لتحديد فترات تزايد وفترات تناقص الدالة .

في الشكل (٥ ـ ١٢) توضّح الرسومات منحنيات ثلاث دوال ، كل منها متزايدة على الفترة [أ ، ب] ألا ترى أن نمط المنحني يختلف من واحدة إلى أخرى؟



شكل (٥ ـ ١٢)



شكل (٥ ـ ١٣)

تدريب (٥-٥)

ارسم منحنياً مقعراً لأسفل على فترة [أ ، ب] وبيّن عليه عدداً من المماسات ماذا تلاحظ عن ميل المماس على الفترة [أ ، ب]؟

تعريف (٥ ـ ٢)

لتكن د قابلة للاشتقاق على الفترة (أ ، ب) نقول إنّ د مقعرة لأعلى على (أ ، ب) إذا كانت دَ متزايدة على الفترة ونقول إنها مقعرة لأسفل (أو محدّبة) إذا كانت دَ متناقصة عليها.

بتطبيق النظرية (٥ ـ ٦) على الدالة دَ نحصل على النظرية التالية، وهي سبيلنا الأساسي لدراسة تقعر الدوال.

نظرية (٥ ـ ٧)

لتكن د قابلة للاشتقاق مرتين على الفترة (أ ، ب)

(١) إذا كانت دً (س) > الصفر لكل س ∈ (أ ، ب) فإن د مقعرة لأعلى على (أ ، ب)

(٢) إذا كانت دً (س) < الصفر لكل س ∈ (أ ، ب) فإن د مقعرة لأسفل على (أ ، ب).

تعريف (٥ ـ ٣)

افرض أنّ حـ نقطة في مجال الدالة د. إذا كان (بالقرب من حـ) اتجاه تقعر د عن يسار حـ يختلف عنه عن يمينها فإننا نسمي النقطة (حـ ، د(حـ)) على منحنى د نقطة انعطاف (انقلاب)

شكل (٥ ـ ١٤)

ملحوظات (٥ ـ ٦)

(١) إذا كانت د مقعرة لأعلى على (أ ، ب) فبالإمكان إثبات أنّ بيان د يقع فوق جميع المماسات على الفترة (أ ، ب) هذه حقيقة يمكن تبوقها بيسر لو تأملنا الشكل (٥ ـ ١٣).

ماذا تستطيع قوله عن المماسات لو كانت د مقعرة لأسفل؟

ماذا تستطيع قوله عن المماس لمنحني د عند نقطة انقلاب؟

(٢) إذا كانت (حـ ، د (حـ)) نقطة انقلاب لدالة قابلة للاشتقاق مرتين فإنّ إشارة د̈(س) عن يمين حـ تختلف عنها عن يسارها ، الأمر الذي يحتم أن تكون د̈(حـ) = صفراً ، هذا الشرط لازم وليس كافياً (انظر التمرين رقم (١٠) من التمارين (٥ ـ ٥)).

مثال (٥-٥)

ادرس تقعر الدالة فيما يلي وبيّن نقاط الانقلاب .

(١) $د(س) = \frac{س^4}{4} + س^3 + 2$

(٢) $د(س) = \frac{س^3}{4} + جاس$ ، $س \in [0 ، ط]$

(٣) $د(س) = \frac{1}{س}$

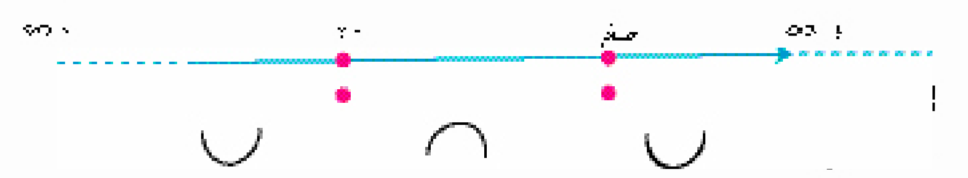
الحـــل :

(١) $د'(س) = س^3 + 3س^2$

$د''(س) = 3س^2 + 6س = 3س(س + 2)$

$د''(س) = 0$ عندما $س = 0$ أو $س = -2$

وبتطبيق ما تعلمته لدراسة إشارة المقدار من الدرجة الثانية ، وباستعمال خط الأعداد نتوصل إلى الشكل :



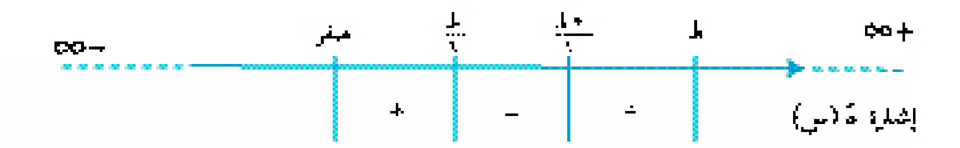
من توزيع إشارات د̈(س) على خط الأعداد ، نرى أن د مقعّرة لأعلى على كل من (-∞ ، -٢) ، (٠ ، ∞) ومقعّرة لأسفل على (-٢ ، ٠) .

بما أنّ التقعّر يتغيّر اتجاهه عند كل من س = صفراً وَ س = −٢ وكلا النقطتين في مجال د فإنّ (٠ ، د (٠)) وَ (−٢ ، د (−٢)) نقطتا انعطاف أي أنّ (٠ ، ٢) ، (−٢ ، −٢) نقطتا انعطاف .

(٢) دَ (س) = $\frac{س}{٢}$ + جتاس   دً (س) = $\frac{١}{٢}$ − جاس

الآن جاس < $\frac{١}{٢}$ على الفترتين (٠ ، $\frac{ط}{٦}$) ، ($\frac{٥ط}{٦}$ ، ط) وجاس > $\frac{١}{٢}$ على ($\frac{ط}{٦}$ ، $\frac{٥ط}{٦}$) فتكون إشارة

دً (س) ممثلة على خط الأعداد كالآتي :

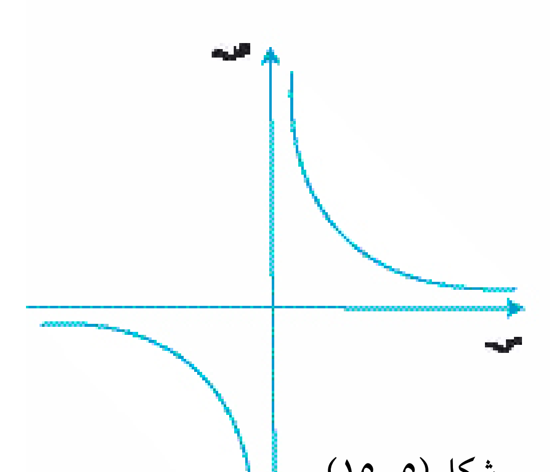


إذن د مقعّرة لأعلى على (٠ ، $\frac{ط}{٦}$) ، ($\frac{٥ط}{٦}$ ، ط) ومقعّرة لأسفل على ($\frac{ط}{٦}$ ، $\frac{٥ط}{٦}$) .

كذلك ($\frac{ط}{٦}$ ، $\frac{ط^٢}{١٤٤}$ + $\frac{١}{٢}$) و ($\frac{٥ط}{٦}$ ، $\frac{٢٥ط^٢}{١٤٤}$ + $\frac{١}{٢}$) نقطتا انعطاف

(٣) دَ (س) = $\frac{-١}{س^٢}$

دً (س) = $\frac{٢}{س^٣}$



شكل (٥ ـ ١٥)

دً (س) > الصفر على (٠ ، ∞) ودً (س) < الصفر على (−∞ ، ٠) . وعليه فإنّ د مقعّرة لأعلى على (٠ ، ∞) ولأسفل على (−∞ ، ٠) ولكن بما أنّ الصفر ليس في مجال د فليس هناك نقاط انعطاف .

تمارين (٥ – ٥)

في التمارين من (١) إلى (٨) ادرس تقعر الدالة وبيّن نقاط الانعطاف

(١) $د(س) = (س + ٢)^{٣}$

(٢) $د(س) = س^{٢}(٤ - س^{٢})$

(٣) $د(س) = س^{٤} - ٦ س^{٢} + ٢ س - ٣$

(٤) $د(س) = ٢ س^{٤} - ٣ س^{٣} - ٣ س^{٢} + ٧ س$

(٥) $د(س) = \frac{س^{٢} + ١}{س - ٢}$

(٦) د(س) = جتاس ، س ∈ [٠ ، ط]

(٧) د(س) = ظاس ، س ∈] $-\frac{ط}{٢}$ ، $\frac{ط}{٢}$ [

(٨) $د(س) = (س - ١)^{\frac{١}{٣}}$

(٩) أوجد قيم أ ، ب ، جـ بحيث يحقق المنحنى $ص = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س$

الشروط التالية .

أولاً: للمنحني نقطة انعطاف عندما $س = \frac{١}{٢}$

ثانياً: للمنحني مماس أفقي عندما س = −١ .

ثالثاً: يمرّ المنحني بالنقطة (١ ، ١٣)

(١٠) باستخدام الدالة $د(س) = س^{٤}$ ، أثبت أنه قد تكون $د''(جـ)$ = الصفر ، ولا تكون

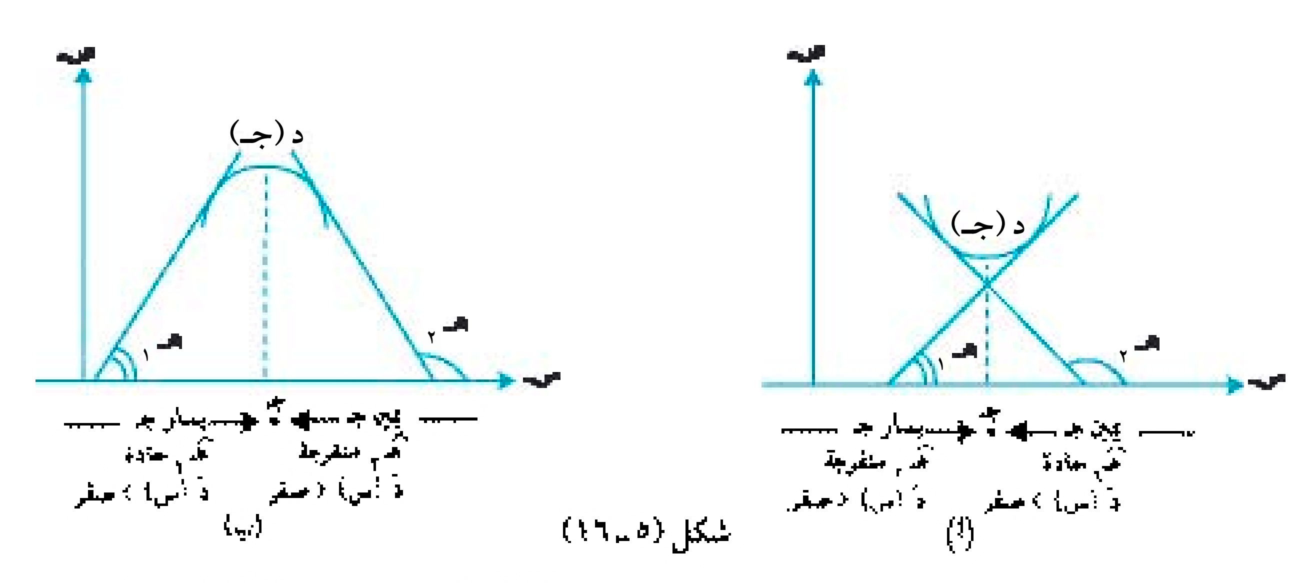
(جـ ، د(جـ)) نقطة انعطاف .

٥ ـ ٦ تصنيف النقاط الحرجة

نعود الآن للسؤال الذي طرحناه في البند (٥ ـ ٢): متى تعطي النقطة الحرجة قيمة عظمى محلية ومتى تعطي قيمة صغرى محلية؟

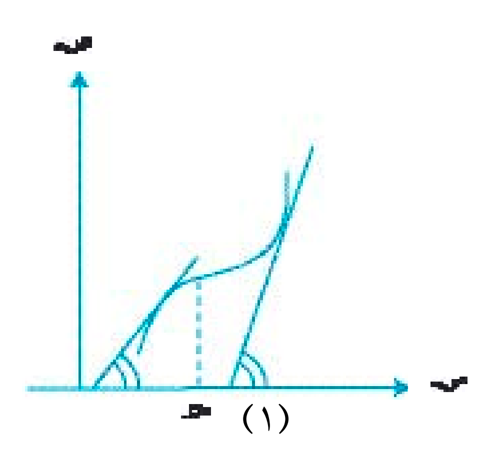
لتكن جـ نقطة حرجة للدالة د وافرض أن د متصلة عند جـ.

إذا كانت دَ (س) سالبة عن يسار جـ وموجبة عن يمينها فإن المماسات عن يسار جـ لمنحنى د تكوّن زوايا منفرجة مع اتجاه محور س الموجب بينما تكوّن المماسات عن يمينها زوايا حادة كما في الرسم (أ) من الشكل (٥ ـ ١٦). من الواضح أن د (جـ) قيمة صغرى محلية. الرسم (ب) من ذات الشكل يوضح ما يحدث إذا كانت دَ (س) > صفر عن يسار جـ و دَ (س) < صفر عن يمينها ومن الواضح أن د (جـ) قيمة عظمى محلية.

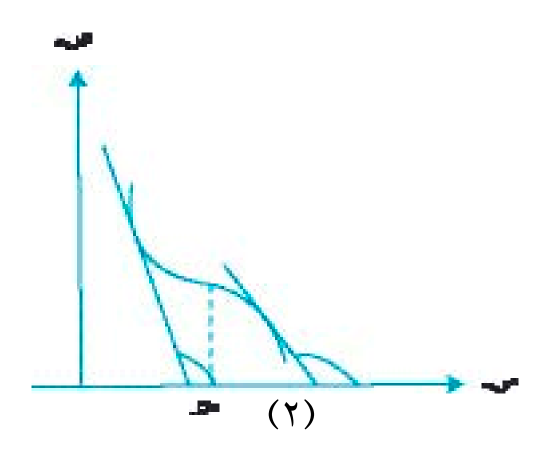


شكل (٥ ـ ١٦)

الشكل (٥ ـ ١٧) يبين ماذا يحدث إذا كانت إشارة دَ (س) عن يمين جـ لا تختلف عنها عن يسارها. ألا ترى أن ليس للدالة قيمة قصوى عند جـ؟



دَ (س) > صفر يمين ويسار جـ



دَ (س) < صفر يمين ويسار جـ

شكل (٥ ـ ١٧)

نقدّم النظرية التالية :

نظرية (٥ ـ ٨) اختبار المشتقة الأولى

لتكن جـ نقطة حرجة للدالة د وافرض أن د متصلة عند جـ

(١) إذا وجدنا بالقرب من جـ أن دَ (س) < صفر عن يسار جـ و دَ (س) > صفر عن يمينها فإنّ د (جـ) قيمة صغرى محلية .

(٢) إذا وجدنا بالقرب من جـ أن دَ (س) > صفر عن يسار جـ و دَ (س) < صفر عن يمينها فإنّ د (جـ) قيمة عظمى محلية .

(٣) إذا وجدنا بالقرب من جـ أن إشارة دَ (س) لا تختلف عن يمين جـ وعن يسارها فإنّ د (جـ) ليست قيمة قصوى محلية .

البرهان :

سنقدّم برهاناً للجزء (١) فقط ونترك الباقي للطالب كتدريب .

توجد فترة مفتوحة (ك ، ل) تحوي ح بحيث تكون دَ(س) < الصفر على (ك ، ح) و دَ(س) > الصفر على (ح ، ل). من النظرية (٥ – ٦) الدالة د متناقصة على (ك ، ح] وعليه فإن:

د(ح) < د(س) لكل س ∈ (ك ، ح)

ومن النظرية نفسها د متزايدة على [ح ، ل) وعليه فإنَّ د(ح) < د(س) لكل س ∈ (ح ، ل)

من هذا نستنتج أنَّ: د(ح) ≤ د(س) لكل س ∈ (ك ، ل).

مما يعني أنَّ د(ح) قيمة صغرى محلية.

مثال (٥–٦)

أوجد القيم القصوى المحلية للدالة د فيما يلي:

(١) د(س) = ٢ س^{3} – ٩ س^{2} + ١٢ س

(٢) د(س) = $\frac{س^{4}}{4}$ – $\frac{س^{2}}{2}$ + ٣

(٣) د(س) = س$^{\frac{4}{3}}$ + ٤ س$^{\frac{1}{3}}$

الحـــل:

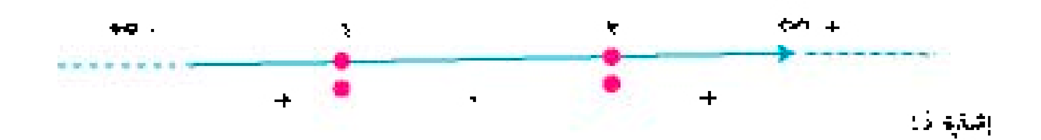
(١) أولاً نوجد النقاط الحرجة فهي وحدها التي يمكن أن تحقق قيماً قصوى محلية

د(س) = ٢ س^{3} – ٩ س^{2} + ١٢ س

دَ(س) = ٦ س^{2} – ١٨ س + ١٢

= ٦ (س – ١) (س – ٢)

إذن ١ ، ٢ نقطتان حرجتان. ولتصنيفهما سندرس إشارات دَ ، مستعينين بخط الأعداد انطلاقاً من معلوماتنا عند دراسة إشارة ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية

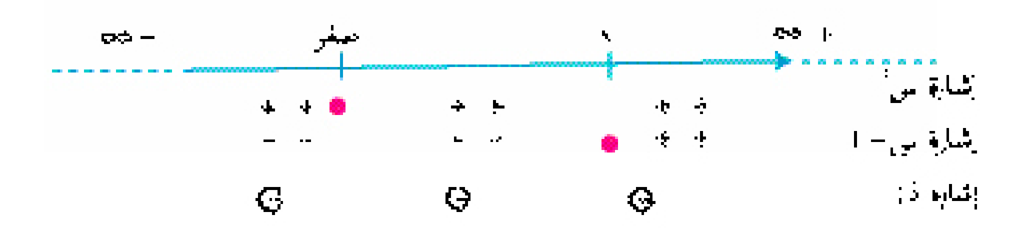


ونستنتج أنّ د(١) = ٥ قيمة عظمى محلية وأنّ د(٢) = ٤ قيمة صغرى محلية .

$$(٢)\ د(س) = \frac{س^٤}{٤} - \frac{س^٣}{٣} + ٣$$

$$دَ(س) = س^٣ - س^٢ = س^٢(س - ١)$$

إذن: صفر ، ١ نقطتان حرجتان ونبيّن على خط الأعداد إشارات دَ :



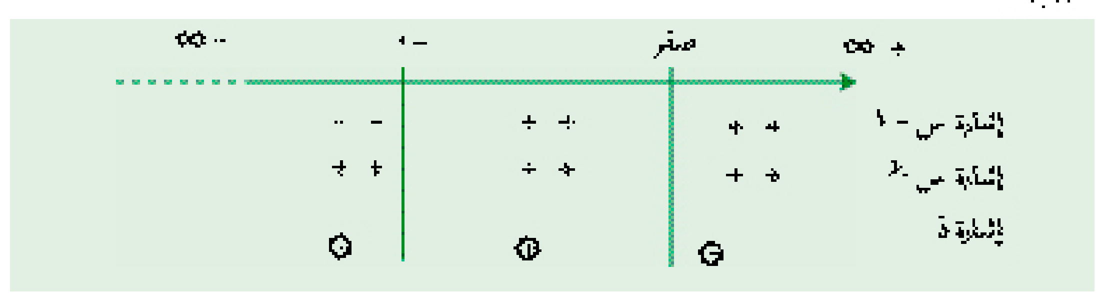
بمقتضى اختبار المشتقة الأولى د(١) = $٢\frac{١١}{١٢}$ قيمة صغرى محلية ، بينما النقطة الحرجة (صفر) لا تعطي قيمة قصوى محلية.

$$(٣)\ د(س) = س^{\frac{٤}{٣}} + ٤\,س^{\frac{١}{٣}}$$

$$دَ(س) = \frac{٤}{٣}\,س^{\frac{١}{٣}} + \frac{٤}{٣}\,س^{-\frac{٢}{٣}} = \frac{٤}{٣}\left(س^{\frac{١}{٣}} + \frac{١}{س^{\frac{٢}{٣}}}\right) = \frac{٤}{٣}\left(\frac{س + ١}{س^{\frac{٢}{٣}}}\right)$$

المشتقة دَ غير معرفة عند الصفر وعليه الصفر نقطة حرجة . كذلك − ١ نقطة حرجة لأن دَ(− ١) = صفراً ، لندرس إشارات دَ على خط الأعداد :

فإن:



وعندئذ نستنتج أن د(٠) ليست قيمة قصوى محلية وأن د(−١) = −٣ قيمة صغرى محلية.

النظرية التالية، والتي نوردها دون برهان، تزودنا باختبار جزئي لتصنيف النقطة الحرجة ج في حالة وجود المشتقة الثانية عند ج.

نظرية (٥ ـ ٩) اختبار المشتقة الثانية

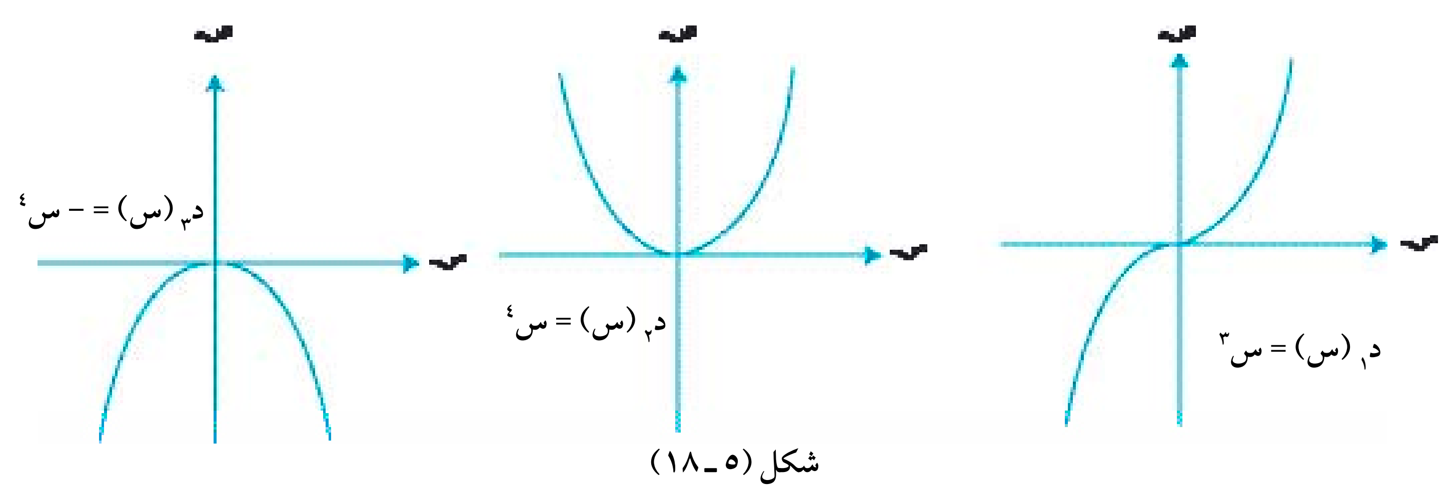
لتكن ج نقطة حرجة للدالة د

(١) إذا كانت دً(ج) > صفر فإنّ د(ج) قيمة صغرى محلية.

(٢) إذا كانت دً(ج) < صفر فإنّ د(ج) قيمة عظمى محلية.

ملحوظات (٥ ـ ٧)

(١) إذا كانت دً(ج) = صفرًا فإنّ هذا الاختبار لا يفيدنا شيئًا إذ إنّ جميع الاحتمالات واردة: قد تكون د(ج) قيمة عظمى محلية أو قيمة صغرى محلية أو لا هذه ولا تلك. فيما يلي نمثل لذلك. لتكن د١(س) = س٣ ، د٢(س) = س٤ ، د٣(س) = − س٤.



شكل (٥ ـ ١٨)

من الواضح أن الصفر نقطة حرجة لكل واحدة من هذه الدوال وأنَّ $دَ_{١}(٠) = دَ_{٢}(٠) = دَ_{٣}(٠) =$ الصفر ، ومن الرسوم البيانية في الشكل (٥ ـ ١٨) نجد أن $د_{١}(٠)$ ليست قيمة قصوى محلية للدالة $د_{١}$ وأن $د_{٢}(٠)$ قيمة صغرى محلية للدالة $د_{٢}$ بينما $د_{٣}(٠)$ قيمة عظمى محلية للدالة $د_{٣}$.

(٢) إذا كانت حـ نقطة حرجة للدالة د بسبب عدم وجود المشتقة دَ (حـ) فلا يمكن بالطبع استخدام اختبار المشتقة الثانية ، فعندئذ دً (حـ) ليست موجودة كذلك .

مثال (٥–٧)

أوجد القيم القصوى المحلية للدالتين الآتيتين :

(١) $د(س) = ١٢ + ٢س^{٢} - س^{٤}$

(٢) $د(س) = س^{٥} - \frac{٥س^{٣}}{٣}$

الحـــل :

سنستخدم هنا اختبار المشتقة الثانية متى ما كان الأمر متيسرًا .

(١) $د(س) = ١٢ + ٢س^{٢} - س^{٤}$

$دَ(س) = ٤س - ٤س^{٣} = ٤س(١ - س^{٢})$

$= ٤س(١ - س)(١ + س)$

النقاط الحرجة هي: صفر، ١، −١.

$د''(س) = ٤ - ١٢ س^٢$

$د''(٠) = ٤ > صفر$، إذن $د(٠) = ١٢$ قيمة صغرى محلية

$د''(١) = -٨ < صفر$، إذن $د(١) = ١٣$ قيمة عظمى محلية

$د''(-١) = -٨ < صفر$، إذن $د(-١) = ١٣$ قيمة عظمى محلية

(٢) $د(س) = س^٥ - \frac{٥ س^٣}{٣}$

$د'(س) = ٥ س^٤ - ٥ س^٢ = ٥ س^٢ (س^٢ - ١)$

$= ٥ س^٢ (س - ١)(س + ١)$

النقاط الحرجة هي: صفر، ١، −١.

$د''(س) = ٢٠ س^٣ - ١٠ س$

$د''(-١) = -١٠ < صفر$، إذن $د(-١) = \frac{٢}{٣}$ قيمة عظمى محلية

$د''(١) = ١٠ > صفر$ إذن $د(١) = -\frac{٢}{٣}$ قيمة صغرى محلية.

$د''(٠) = ٠$، إذن اختبار المشتقة الثانية غير مجدٍ. لنستخدم اختبار المشتقة الأولى.

فيما يلي نبين إشارات $د'$ على خط الأعداد.

	$+\infty$ ← ١	١ ← صفر	صفر ← −١	−١ ← $-\infty$
إشارة $س^٢$	+ +	+ +	+ +	+ +
إشارة $س - ١$	+ +	− −	− −	− −
إشارة $س + ١$	+ +	+ +	+ +	− −
إشارة $د'$	⊕	⊖	⊖	⊕

بما أن إشارة $د'$ لا تتغير عند الصفر فإن $د(٠)$ ليست قيمة قصوى محلية. لاحظ أن اختبار المشتقة الأولى يؤكد ما حصلنا عليه سابقاً من أن $د(١)$ قيمة صغرى محلية و $د(-١)$ قيمة عظمى محلية.

تمارين (٥ – ٦)

حدد مواضع القيم العظمى والصغرى المحلية للدوال التالية :

(١) $د(س) = (س - ١)^{٢} + ٢$

(٢) $د(س) = س^{٣} - ٦س^{٢} + ٩س - ٥$

(٣) $د(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} - ٢٤س + ١٢$

(٤) $د(س) = س(س - ٤)^{٣}$

(٥) $د(س) = (س + ١)^{٢}\sqrt{س + ١}$

(٦) $د(س) = \frac{س^{٢}}{س^{٢} + ١}$

(٧) $د(س) = \frac{س^{٢} + ١}{س - ١}$ ، $س \neq ١$

(٨) $د(س) = \frac{س^{٢} - ٣}{س - ٢}$ ، $س \neq ٢$

(٩) $د(س) = س^{٢} + \frac{٤٨}{س}$ ، س ≠ الصفر

(١٠) $د(س) = س^{\frac{٢}{٣}}(٢س - ٧)$

(١١) $د(س) = جاس + جتاس$ ، $س \in [٠ ، ٢ط]$

(١٢) $د(س) = ٤ جاس + جتا٢س$ ، $س \in [٠ ، ط]$.

٥ ـ ٧ رسم المنحنيات (حالة كثيرات الحدود)

لنتذكر أن لكل دالة د معرفة على مجال ف بيانًا يتكون من النقاط في المستوى التي تشكل المجموعة {(س،ص) : س ∈ ف ، ص = د (س)} ولما كان البيان صورة مرئية فإنه يسهل علينا أن نلتقط منه ما نود عن سلوك الدالة وأن نتذكر هذا السلوك . ولعل الطالب الفطن قد لاحظ كيف استفدنا من فكرة البيان في تركيز وإيضاح المفاهيم التي وردت في البنود السابقة .

في هذا البند سنتعرف لإيجاد طريقة تعيننا على رسم بيانات الدوال. ومن المؤكد أن الطالب قد قام برسم بيانات بعض الدوال في سابق دراسته باستخدام طريقة إيجاد عدد من الأزواج (س ، د (س)) وملء الفراغ بينها بمنحنيات مناسبة . إن أقل ما نوصف به هذه الطريقة أنها تفتقر إلى الدقة فبين نقطتين في المستوى يمكن رسم عدد غير منتهِ من المنحنيات كل منها له نمطه المختلف من حيث مثلاً الأطراد والتقعر. إن الطريقة التي سنفصلها فيما يلي تهدف إلى استخلاص منحنى الدالة مع تبيان نمطه وخطتنا تستند على استنباط أقصى ما نستطيع عن سلوك الدالة د بتأمل د نفسها ، ومشتقتيها الأولى والثانية .

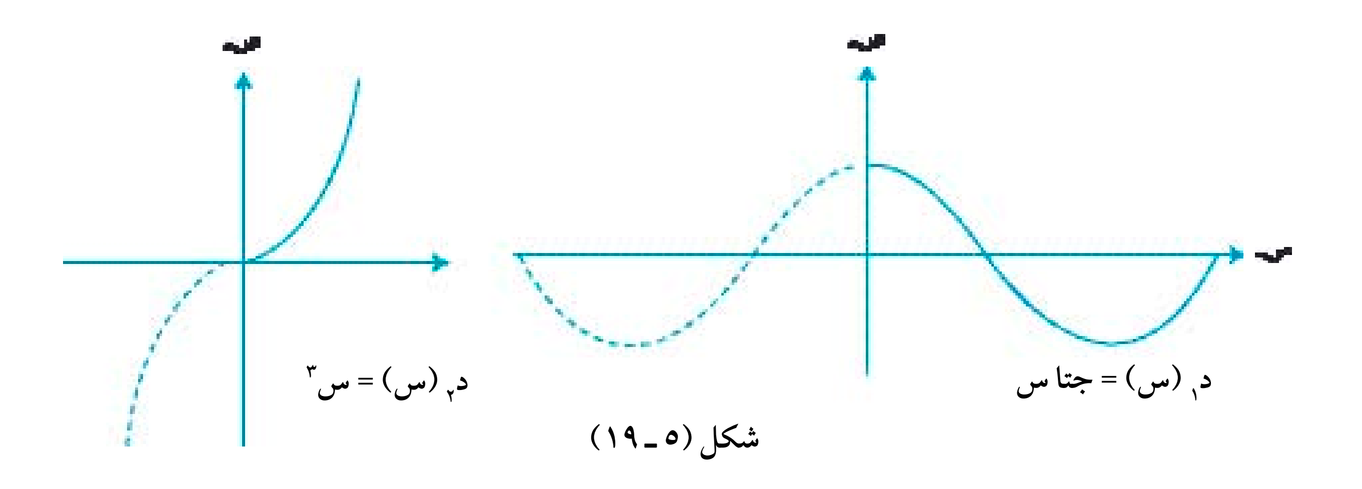
في هذا الدرس نركز جهدنا على الدوال كثيرات الحدود.

أولاً : معلومات يمكن استقاؤها من الدالـة

(١) تعيين مجال الدالة

(٢) تقرير التناظر. فلو كانت د زوجية ، أي تحقق د(س) = د (− س) فإن بيانها متناظر حول محور ص ويكفي رسمه على س ≥ الصفر ثم يكمل بالتناظر. أما إذا كانت د فردية ، أي د(−س)= −د(س) فإن بيانها متناظر حول نقطة الأصل ويكفي رسمه على س ≥ الصفر ثم يكمل بإجراء نصف دورة حول نقطة الأصل (أو بتناظر حول محور ص مصحوب بتناظر حول محور س).

في الشكل (٥ ـ ١٩) نقدم بياني د، (س) = جتاس وهي زوجية و د، (س) = $س^٣$ وهي فردية .



شكل (٥ ـ ١٩)

(٣) نقاط التقاطع مع المحورين . فبوضع س = صفراً في المعادلة ص = د (س) نحصل على نقاط التقاطع مع محور ص وبوضع ص = صفراً نحصل على نقاط التقاطع مع محور س . ونود أن نشير إلى أنه قد يكون من العسير أحياناً إيجاد هذه النقاط .

ثانياً : معلومات مستقاة من المشتقة الأولى :

(١) فترات التزايد وفترات التناقص .

(٢) النقاط الحرجة وتصنيفها .

ثالثاً : معلومات تستقى من المشتقة الثانيـة :

(١) فترات التقعر لأعلى وفترات التقعر لأسفل .

(٢) نقاط الانقلاب .

بعد استخراجنا لهذه المعلومات نكون في وضع نستطيع فيه تحديد شكل المنحني وباستخدام بعض النقاط (س ، د (س)) نتمكن من تعيينه في المستوي .

مثال (٥–٨)

ارسم بيان الدالة د(س) = س^٣ – ٣ س + ٢

الحـــل :

الخطوة الأولى : استخراج معلومات من د

(١) الدالة كثيرة حدود ومجالها ح .

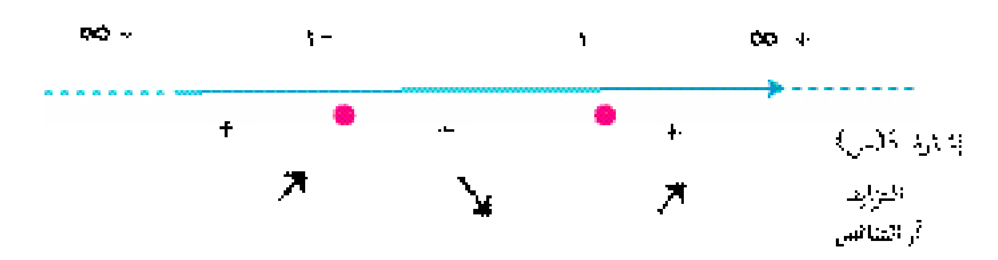
(٢) لا يوجد تناظر حول ص ولا حول نقطة الأصل.

(٣) د(٠) = ٢ ، وعليه البيان يقطع محور ص عند ص = ٢ ليس من السهل حساب نقاط التقاطع مع محور س

الخطوة الثـانيـة : استخراج معلومات من دَ

دَ(س) = ٣ س^٢ – ٣ = ٣ (س^٢ – ١) = ٣ (س – ١) (س + ١)

إذن ١ ، – ١ نقطتان حرجتان . لنرسم إشارات دَ على خط الأعداد :

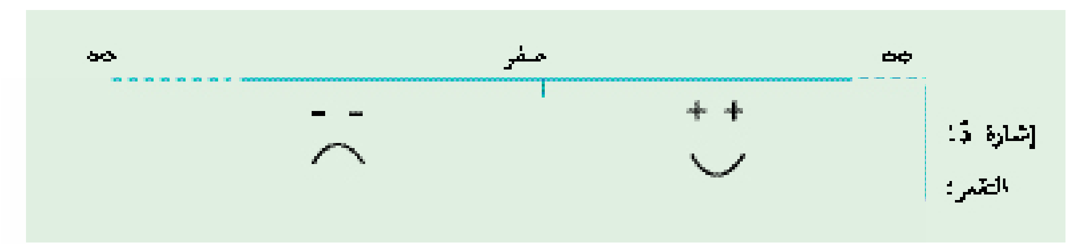


من الجدول : د متزايدة على (– ∞ ، – ١] وَ [١ ، ∞) وَ د متناقصة على [– ١ ، ١]

كذلك د(– ١) قيمة عظمى محلية وَ د(١) قيمة صغرى محلية .

الخطوة الثـالثـة : استخراج معلومات من دً

د̋(س) = ٦ س . الرسم أدناه يبين إشارات د̋



الدالة مقعرة لأعلى على (٠ ، ∞) ولأسفل على (− ∞ ، ٠) كذلك (٠ ، ٢) نقطة انقلاب.

الخطوة الرابعة : تحديد بعض النقاط المهمة والمساعدة على رسم المنحنى بواسطة د

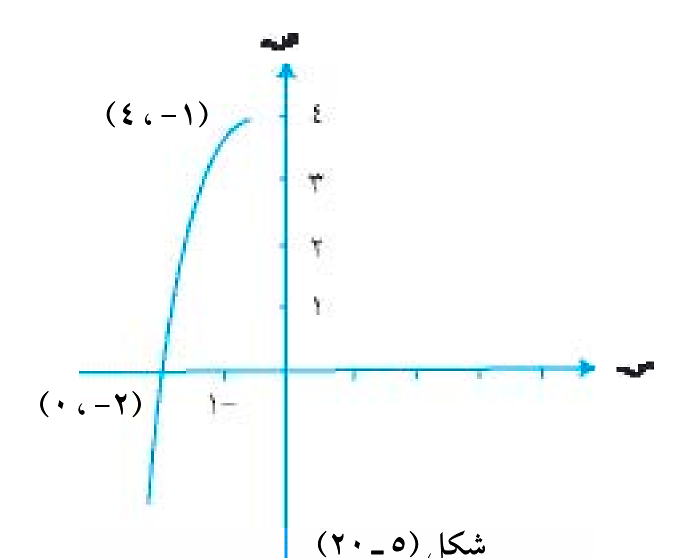
النقاط المهمة هي عند س = − ١ ، س = ١ ، س = صفراً (لماذا؟)

س	−٢	−١	٠	١	٢
د(س)	٠	٤	٢	٠	٤

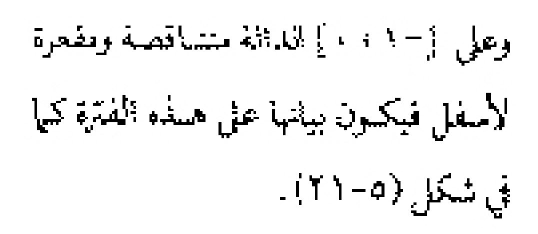
النقاط المهمة تجزئ خط الأعداد إلى أربعة أقسام (−∞ ، −١]، [−١، ٠]، [٠ ، ١]، [١ ، ∞).

على (−∞ ، −١] الدالة متزايدة ويتقعر لأسفل وعليه يكون بيانها كما في شكل (٥ ـ ٢٠).

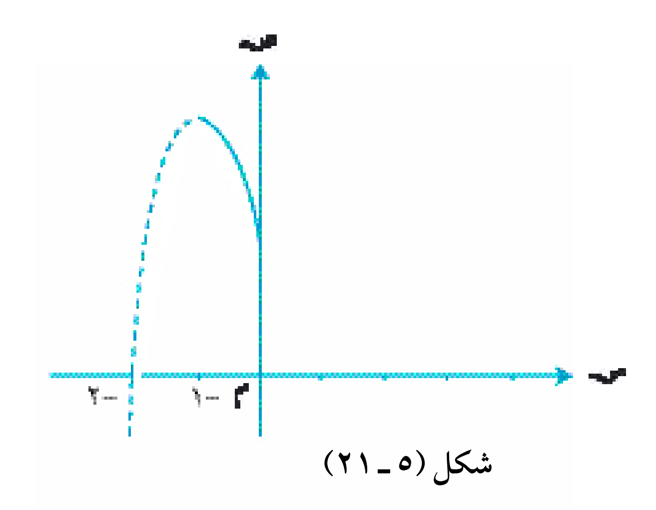
بيان د على (− ∞ ، − ١]



شكل (٥ ـ ٢٠)

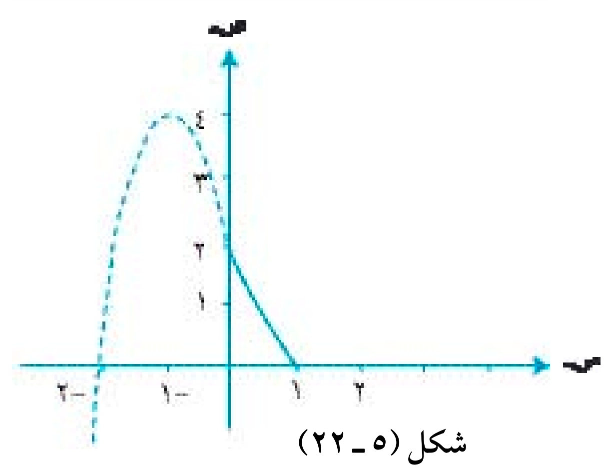


وعلى [−١ ، ٠] الدالة متناقصة ومقعرة لأسفل فيكون بيانها على هذه الفترة كما في شكل (٥-٢١).



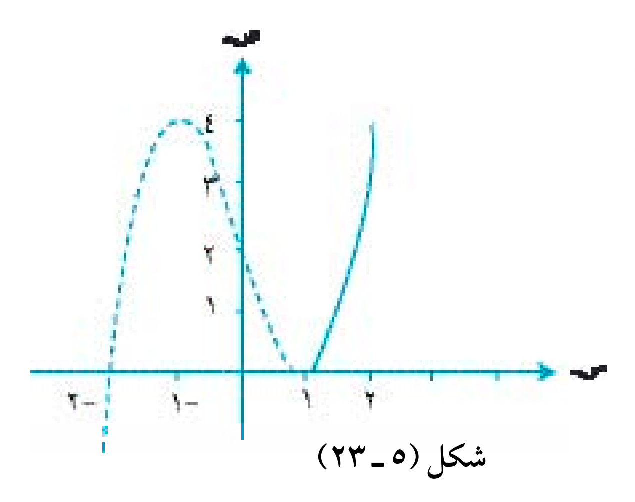
شكل (٥ ـ ٢١)

على الفترة [٠ ، ١] الدالة لا زالت متناقصة ولكنها مقعرة لأعلى فيكون بيانها على هذه الفترة كما في شكل (٥ ـ ٢٢).



شكل (٥ ـ ٢٢)

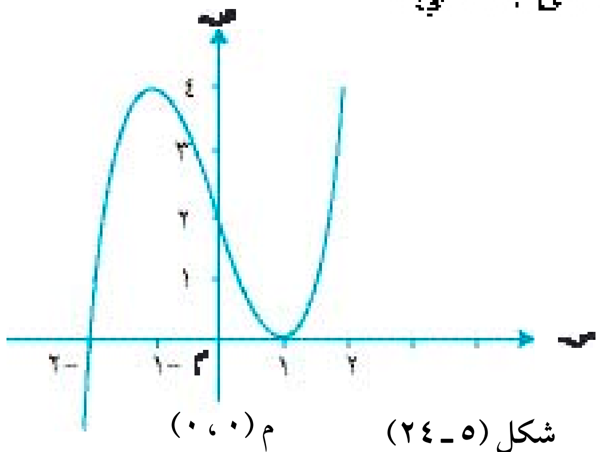
أما على الفترة [١ ، ∞) فالدالة متزايدة وتقعر لأعلى الأمر الذي يعني أن بيانها على هذه الفترة هو كما في الشكل (٥ ـ ٢٣).



شكل (٥ ـ ٢٣)



وبهذا تكون الصورة الكاملة لبيان د على مجالها هي:



م (٠، ٠)　　شكل (٥ـ٢٤)

مثال (٥−٩)

ارسم المنحنى $\text{ص} = (\text{س}^2 - ١)^2$

الحـــل :

الخطوة الأولى : ندرس د حيث $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^4 - ٢\,\text{س}^2 + ١$.

(١) المجال هو ح

(٢) الدالة زوجية ولذا بيانها متناظر حول محور ص.

(٣) $\text{د}(٠) = ١$ ولذا فإن البيان يقطع محور ص عند $\text{ص} = ١$.

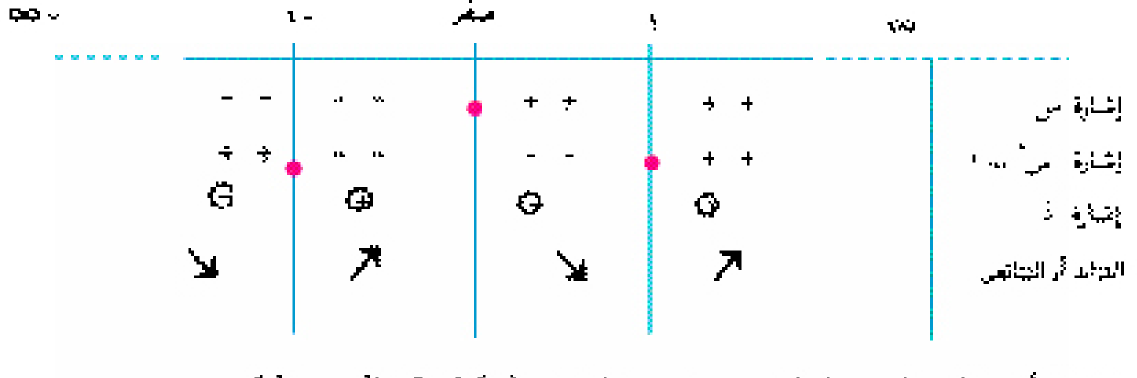
كذلك $\text{د}(\text{س}) =$ صفراً إذا كانت $\text{س} = \pm ١$ ولذا يقطع البيان محور س عند $\text{س} = ١$ ، $\text{س} = -١$

الخطوة الثانيـة : ندرس دَ

$$\text{دَ}(\text{س}) = ٤\,\text{س}^3 - ٤\,\text{س} = ٤\,\text{س}(\text{س}^2 - ١)$$

$$= ٤\,\text{س}(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)$$

إذن ١ ، −١ ، ٠ نقط حرجة وإشارات دَ موضحة على خط الأعداد كالآتي:



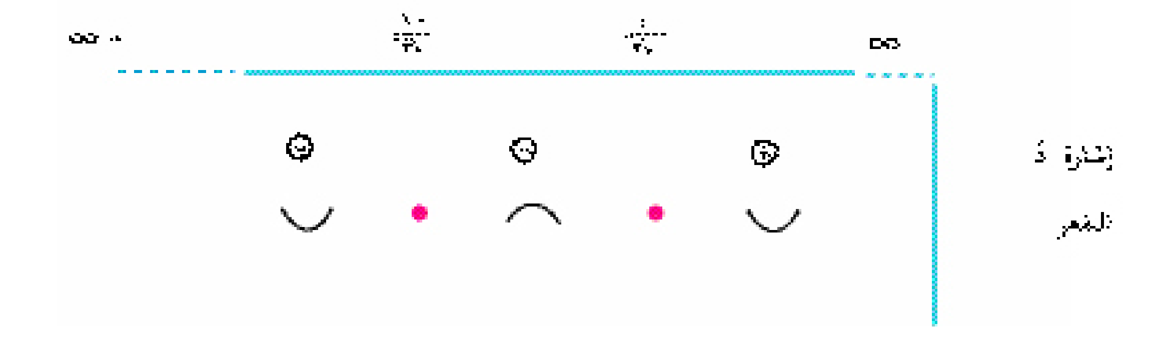
لاحظ أن د(−١) ، د(١) قيم صغرى محلية و د(٠) قيمة عظمى محلية .

الخطوة الثالثة : ندرس دً

$دً(س) = ١٢ س^٢ − ٤ = ١٢ \left(س^٢ − \frac{١}{٣}\right)$

$= ١٢ \left(س − \frac{١}{\sqrt{٣}}\right)\left(س + \frac{١}{\sqrt{٣}}\right)$

الرسم التالي يبيِّن إشارات دً والتقعر على خط الأعداد :



ونلاحظ أنّ $\left(\frac{١}{\sqrt{٣}} ، د\left(\frac{١}{\sqrt{٣}}\right)\right)$ ، $\left(\frac{-١}{\sqrt{٣}} ، د\left(\frac{-١}{\sqrt{٣}}\right)\right)$ نقطتا انقلاب

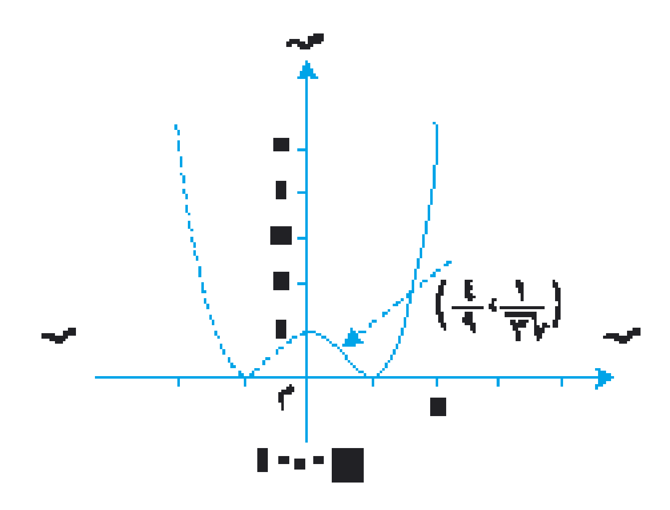
الخطوة الرابعة : تحدَّد بعض النقاط على المنحني ويكفي أن نركِّز على الفترة [٠ ، ∞[بسبب التناظر .

س	٠	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ≈ ٠,٦	١	٢
د(س)	١	$\frac{٤}{٩}$	٠	٩

النقاط الحرجة ونقاط الانقلاب تقسم [٠ ، ∞) إلى ثلاثة أجزاء يكون سلوك د فيهما كما هو موضح على خط الأعداد كما يأتي :

∞ ← ١	١ ← $\frac{١}{\sqrt{٣}}$	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ← صفر
د متزايدة د مقعرة لأعلى	د متناقصة د مقعرة لأعلى	د متناقصة د مقعرة لأسفل

من هنا نرى أن بيان د كما في الشكل (٥ ـ ٢٥) (حيث النقاط تبرز إمكاننا له باستخدام التناظر) .



تمارين (٥ – ٧)

ارسم منحنى الدوال التالية مع توضيح خطوات الحل :

(١) د (س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} – ٢ س^{٢} + ٣ س + ١

(٢) د (س) = ٢ س^{٣} – ٦ س^{٢} + ٦ س – ٢

(٣) د (س) = ٢ س^{٤} + ٤ س^{٣}

(٤) د (س) = $\frac{٣}{٤}$ س^{٤} – س^{٣} + ١

(٥) د (س) = $\frac{١}{٨}$ (٣ س^{٥} – ١٥ س^{٤} + ٢٠ س^{٣})

(٦) د (س) = (٥ – س) (س – ٢)^{٢}

(٧) د (س) = ٦ س^{٢} – س^{٤} – ٥

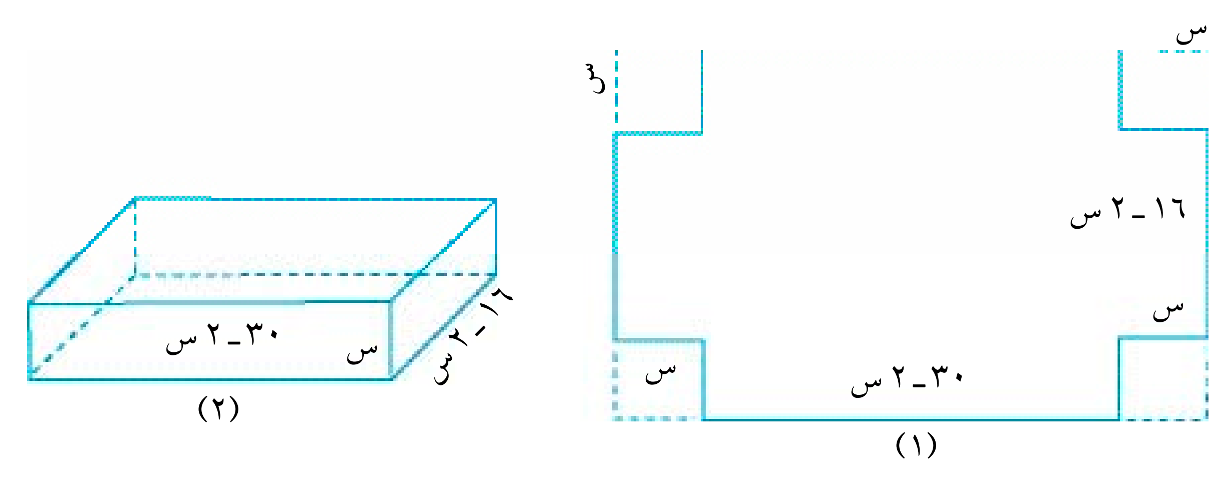
٥ ـ ٨ مسائـل القيم القصوى التطبيقية :

في هـذا البند نقـوم بتطبيق مـا تعلمنـاه عـن كيفيـة إيجاد القيم القصـوى على بعض المسائل العملية . تتميز هذه المسائل بأنها تصـاغ بلغة المجالات التي ترد فيها، ولذا لإيجاد حل الواحدة منها لا بد لنـا في البدء من بناء نموذج رياضي يتم بواسطته تحويل التقارير الواردة في المسائل إلى لغة الرياضيات الرمزية ، فنقوم بإدخال متغيرات وقوانين ودوال .

وبما أن مجالات هذه المسائل كثيرة بلا قيد أو حد ، فليس ثمة أمل في إيجاد قواعـد دائمة تتبع لاستنباط الحلول ، لهذا السبب سنكتفي بإبراز عدد من الأمثلة .

مثال (٥ـ١٠)

نود أن نصنع صندوقاً مستطيل القاعدة من قطعة ورق مقوى أبعادها ٣٠ سم، ١٦ سم وذلك بقطع مـربعات متسـاوية من كل ركن ثم ثني الأطراف ، ما هـو طول ضلع المربع المقطوع حتى يكون حجم الصندوق الناتج أكبر ما يمكن؟



شكل (٥ـ٢٦)

الحـــل :

الشكل (٥ ـ ٢٦) يحوي معلوماتنا عن المسألة حيث فرضنا أن طول ضلع المربع المقطوع هو س يتضح من الشكل أن أبعاد الصندوق الناتج هي س ، ٣٠ − ٢ س ، ١٦ − ٢ س ، فإذا كان الحجم ح، فإن: ح = س (٣٠ − ٢ س) (١٦ − ٢ س).

لكي يكون لدينا صندوق يجب أن يكون ارتفاعه غير سالب أي س ≥ الصفر، وأن يكون العرض كذلك غير سالب أي ١٦ − ٢ س ≥ الصفر، ونلاحظ أنه في هذه الحالة يصبح الطول كذلك غير سالب . من هنا نرى أن ٨ ≥ س ≥ ٠ .

وبلغة الرياضيات يصبح المطلوب منا هو إيجاد أين تحقق الدالة

د (س) = س (٣٠ − ٢ س) (١٦ − ٢ س)

قيمتها العظمى على الفترة [٠ ، ٨]

القيمة المطلوبة تتحقق عند الصفر، أو ٨ أو نقطة حرجة للدالة د في (٠ ، ٨).

بما أن د كثيرة حدود، فنقاطها الحرجة هي التي تنعدم عندها المشتقة،

د (س) = ٤ (س^{٣} − ٢٣ س^{٢} + ١٢٠ س)

إذن دَ (س) = ٤ (٣ س^{٢} − ٤٦ س + ١٢٠)

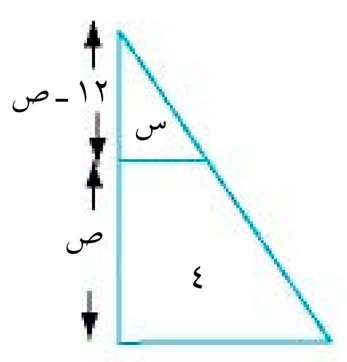
= ٤ (٣ س − ١٠) (س − ١٢)

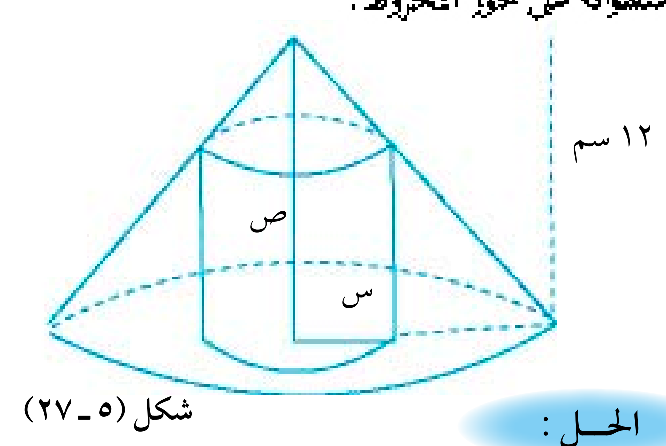
وعلى هذا فالنقاط الحرجة هي $\frac{١٠}{٣}$ و ١٢ . نستبعد ١٢ لأنها خارج (٠ ، ٨) ونستنتج أن القيمة العظمى المطلوبة تتحقق عند الصفر أو ٨ أو $\frac{١٠}{٣}$.

الآن : د (٠) = الصفر ، د (٨) = الصفر و د ($\frac{١٠}{٣}$) > الصفر وعليه للحصول على أكبر صندوق نأخذ طول الضلع المقطوع ليكون $\frac{١٠}{٣}$ سم .

مثال (٥-١١)

أوجد نصف قطر القاعدة والارتفاع للأسطوانة الدائرية القائمة ذات الحجم الأكبر والتي يمكن حشرها داخل مخروط ارتفاعه ١٢ سم ونصف قطر قاعدته ٤ سم بحيث ينطبق محور الأسطوانة على محور المخروط.





شكل (٥ ـ ٢٧)

الحــل :

ليكن س نصف قطر قاعدة الأسطوانة و ص ارتفاعها.

الشكل (٥ ـ ٢٧) يبرز المعلومات المتوفرة لدينا.

إذا فرضنا أن ح هو حجم الأسطوانة فإن :

$ح = ط س^٢ ص$

والمطلوب حساب أكبر قيمة للمتغير ح ، نلاحظ اعتماد ح على متغيرين فنقوم بالتعبير عن أحدهما بدلالة الآخر باستخدام تشابه المثلثات من الشكل الأيسر أعلاه ، نرى أنَّ :

$$\frac{١٢ - ص}{س} = \frac{١٢}{٤} = ٣$$

أي أنَّ : $١٢ - ص = ٣ س$ ،

أو أنَّ $ص = ١٢ - ٣ س$

على هذا يكون :

ح = ط س^{٢} (١٢ − ٣ س)

حتى تكون لدينا أسطوانة لا بد أن يكون س > الصفر، وحتى تكون الأسطوانة محشورة داخل المخروط فلا مناص من أن يكون س ≤ ٤ على هذا يصبح السؤال المطروح علينا هو :

أين تحقق الدالة :

د(س) = ط س^{٢} (١٢ − ٣ س)

قيمتها العظمى على [٠ ، ٤]؟

القيمة العظمى تتحقق عند الصفر ، أو ٤ أو نقطة حرجة للدالة في (٠ ، ٤)

د(س) = ٣ ط (٤ س^{٢} − س^{٣})

دَ(س) = ٣ ط (٨ س − ٣ س^{٢}) = ٣ ط س (٨ − ٣ س)

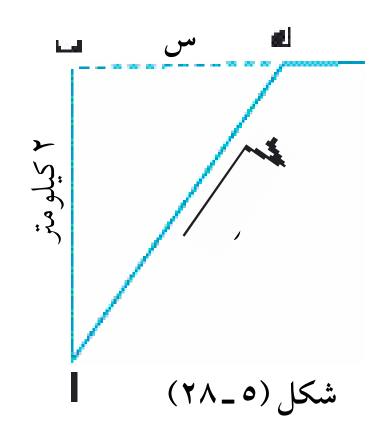
النقاط الحرجة هي الصفر أو $\frac{٨}{٣}$ ، وبذا تتحقق القيمة العظمى عند الصفر أو ٤ أو $\frac{٨}{٣}$.

د(٠) = د(٤) = صفرًا بينما د($\frac{٨}{٣}$) > صفر على هذا للحصول على أكبر أسطوانة نأخذ نصف القطر س ليكون $\frac{٨}{٣}$ سم وعندئذ يكون الارتفاع ع = ٤ سم .

مثال (٥-١٢)

يقع حقل بترول في البحر عند النقطة أ التي تبعد ٢ كيلومترًا عن أقرب نقطة ب على الساحل . نودُّ أن نضخ البترول من أ إلى المصفاة التي تقع عند النقطة حـ على الساحل و تبعد ٦ كيلومترات من ب وذلك بواسطة أنابيب في البحر على خط مستقيم حتى نقطة ك على الساحل ثم بأنابيب على اليابسة على خط مستقيم من ك إلى حـ ، إذا كانت تكلفة الأنابيب تحت سطح البحر هي ٥٠٠٫٠٠٠ ريال لكل كيلومتر وعلى اليابسة ٣٠٠٫٠٠٠ ريال لكل كيلومتر، فأين

يجب أن تكون ك لتحقق أقل تكلفة؟



شكل (٥ ـ ٢٨)

الحـــل :

افرض أن س هو بعد ك عن ب و ص هي تكلفة الأنابيب.

طول الأنابيب تحت سطح البحر = $\sqrt{٤ + س^٢}$

تكلفة أنابيب البحر = ٥٠٠,٠٠٠ $\sqrt{٤ + س^٢}$

طول الأنابيب على اليابسة = ٦ ـ س

تكلفة أنابيب اليابسة = ٣٠٠,٠٠٠ (٦ ـ س)

إذن ص = ٥٠٠,٠٠٠ $\sqrt{٤ + س^٢}$ + ٣٠٠,٠٠٠ (٦ ـ س)

من الواضح أن ٠ ≤ س ≤ ٦ وعليه يكون المطلوب هو إيجاد أين تتحقق القيمة الصغرى للدالة د (س) = ١٠٠,٠٠٠ [٥ $\sqrt{٤ + س^٢}$ + ٣ (٦ ـ س)]

على الفترة [٠ ، ٦]

القيمة الصغرى تتحقق عند الصفر أو ٦ أو عند نقطة حرجة في (٠ ، ٦)

$$د'(س) = ١٠٠,٠٠٠ \left[\frac{٥ س}{\sqrt{٤ + س^٢}} - ٣ \right]$$

للنقاط الحرجة نضع د'( ) = صفراً

عندئذ $\frac{٥ س}{\sqrt{٤ + س^٢}} - ٣$

٥ س = ٣ $\sqrt{٤ + س^٢}$ ⟸ ٢٥ س^٢ = ٣٦ + ٩ س^٢ ⟸ ١٦ س^٢ = ٣٦ ⟸ س = $\frac{٣}{٢}$ ،

إذن القيمة الصغرى تتحقق عند الصفر أو ٦ أو $\frac{٣}{٢}$

الآن د (٠) = ٢٨٠٠,٠٠٠

د (٦) = ١٠٠٠٠٠٠ × ١٠ $\sqrt{١٠}$ ≈ ٣٠٠٠٠٠٠٠

د $\left(\frac{٣}{٢}\right)$ = ٢٦٠٠٠٠٠٠

إذن أصغر قيمة تتحقق عند $\frac{٣}{٢}$ وإذا تأخذ لك على بعد $\frac{١}{٢}$ ١ كيلومتر من ...

ترشدنا الأمثلة السابقة لاتخاذ الخطوات التالية لحل مسائل القيم القصوى التطبيقية :

(١) حدد الكميات ذات العلاقة بالسؤال وربما حبذا على الرسم .

(٢) أوجد قانوناً للكمية المطلوب جعلها أكبر أو أصغر ما يمكن .

(٣) باستخدام الشروط الواردة في المسألة تخلص من المتغيرات الزائدة وضع الكمية المطلوب جعلها أقصى ما يمكن بدلالة متغير واحد .

(٤) حدد الفترة التي ينتمي لها هذا المتغير من واقع المسألة .

(٥) اتبع ما تعلمته في البند (٥ - ١) إن كانت الفترة في الخطوة (٤) محدودة ومغلقة .

مثال (٥-١٣)

أوجد أبعاد العلبة الأسطوانية المفتوحة من أعلى ذات الحجم ١ قدم³ والتي تستخدم أقل كمية من المعدن ثابت السمك .

الحـــل :

شكل (٥ - ٢٩)

نفرض أن نصف قطر القاعدة هو س وأن الارتفاع هو ص

مساحة السطح ع = ٢ ط س ص + ط س²

الحجم ح = ط س² ص = ١

إذن ص = $\frac{١}{ط س^٢}$

وعليه فإن

ع = $\frac{٢}{س}$ + ط س²

وهكذا أصبحت ع الآن بدلالة متغير واحد هو س ، ومن الواضح أن س ∈ (٠ ، ∞)

فيكون المطلوب هو إيجاد قيمة س في (٠ ، ∞) التي تجعل ع أصغر ما يمكن .

هذه المرة لا نستطيع استخدام طريقة البند (٥ ــ ٦) فالفترة غير محدودة وغير مغلقة . لكي نخرج من هذا المأزق نستغل الملحوظة (٥ ــ ٤) التي تؤكد أن القيمة القصوى المحلية تكون قيمة قصوى مطلقة إذا كان للدالة نقطة حرجة وحيدة في الفترة .

$د(س) = \frac{٢}{س} + ط س^{٢}$

إذن $دَ(س) = \frac{٢(ط س^{٣} - ١)}{س^{٢}}$

فتكون $\frac{١}{\sqrt[٣]{ط}}$ هي النقطة الحرجة الوحيدة للدالة في (٠ ، ∞)

الآن $دً(س) = \frac{٤}{س^{٣}} + ٢ ط$

وعليه فإن :

$دً\left(\frac{١}{\sqrt[٣]{ط}}\right) >$ الصفر

الأمر الذي يعني أن $د\left(\frac{١}{\sqrt[٣]{ط}}\right)$ قيمة صغرى محلية . ولما كانت لا توجد نقطة حرجة سوى $\left(\frac{١}{\sqrt[٣]{ط}}\right)$ في (٠ ، ∞) فإن $د\left(\frac{١}{\sqrt[٣]{ط}}\right)$ هي أصغر قيمة للدالة في (٠ ، ∞)

إذن نصف القطر $= \frac{١}{\sqrt[٣]{ط}}$

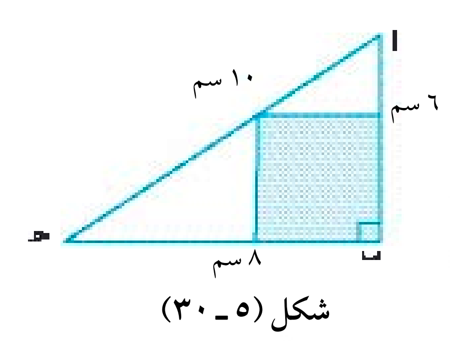
والارتفاع $= \frac{١}{\sqrt[٣]{ط}}$.

تمارين (٥ – ٨)

(١) أوجد بعدي المستطيل ذي المحيط م سم وصاحب أكبر مساحة .

(٢) أوجد عددين غير سالبين مجموعهما ٤٠ بحيث يكون حاصل ضربهما أكبر ما يمكن .

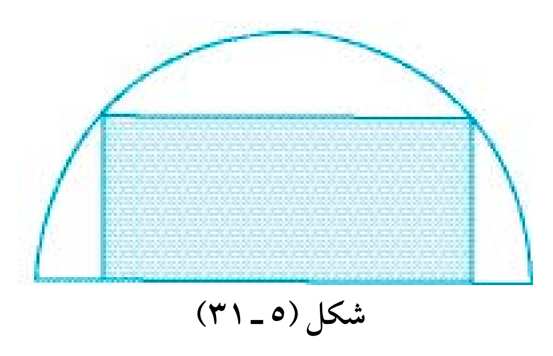
(٣) أوجد أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية طول وتره ٢٠ سم بحيث تكون مساحته أكبر ما يمكن .



شكل (٥ ـ ٣٠)

(٤) في الشكل (٥ ـ ٣٠) ا ب حـ مثلث قائم الزاوية أبعاده هي ٦ سم ، ٨ سم ، ١٠ سم ما هما بعدا المستطيل صاحب أكبر مساحة الذي يمكن رسمه كما في الشكل ؟

(٥) لأي قيم س على الفترة [٠ ، $\frac{ط}{٢}$] تكون المسافة بين المنحنيين ص = $\frac{١}{٢}$ س ، ص = جاس أكبر ما يمكن؟


شكل (٥ ـ ٣١)

(٦) أوجد بُعدي المستطيل صاحب أكبر مساحة والذي يمكن وضعه في نصف دائرة نصف قطرها ں كما في الشكل (٥ ـ ٣١) .

(٧) نريد أن نرسم مستطيلاً بحيث يقع رأسان منه على محور سـ والرأسان الآخران فوق محور سـ على المنحنى ص = ٤ – س^{٢} . كيف نختار بُعديه لتكون مساحته أكبر ما يمكن؟

(٨) أنشئ مستقيماً يمر بالنقطة (٣ ، ٢) ويصنع مع المحورين س ، ص مثلثاً في الربع الأول مساحته أصغر ما يمكن.

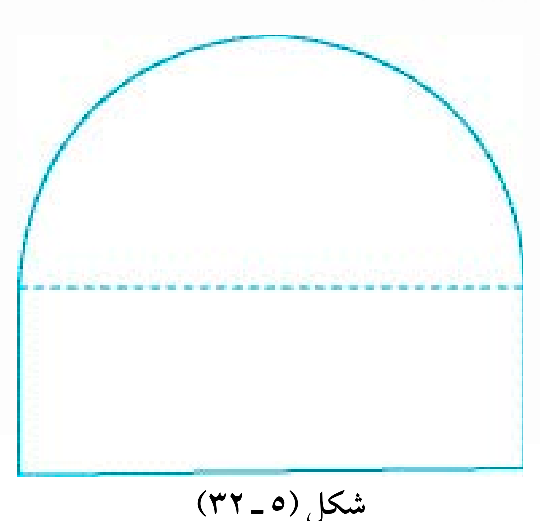
(٩) على أي نقطة في المنحنى $ص = \frac{١}{١ + س^{٢}}$ يكون ميل المماس أكبر ما يمكن؟

(١٠) أوجد نصف قطر الأسطوانة ذات أكبر حجم والتي يمكن حشرها في كرة نصف قطرها نق.

(١١) إذا أردت أن تصنع كوباً من الزجاج على هيئة مخروط دائري قائم حجمه ٣ط سم^{٣}. كيف تختار ارتفاعه حتى تستخدم أقل قدر من الزجاج.

(١٢) أوجد أقرب نقطة على المنحنى $ص = س^{٢} + ١$ من النقطة أ (٣ ، ١).

(١٣) الشكل (٥ ـ ٣٢) لشباك جزؤه الأسفل مستطيل والأعلى نصف دائرة. إذا كان محيط الشباك ٤ ط متراً فكيف تختار نصف قطر الدائرة ليسمح الشباك بدخول أكبر قدر من الضوء؟



شكل (٥ ـ ٣٢)

تمارين عامة

في التمرينين (١) ، (٢) أجب عن الأسئلة التالية :

(أ) أوجد فترات تزايد الدالة د .

(ب) أوجد قيم د العظمى والصغرى المحلية .

(جـ) أوجد نقاط الانقلاب .

(د) أوجد قيم د القصوى على الفترة ف المعطاة .

(هـ) ارسم بيان الدالة د

(١) د(س) = $\frac{س^4}{3}$ − ٤ س ، ف = [١ ، ٣]

(٢) د(س) = س^3 − ٦ س^2 + ٨ س ، ف = [٠ ، ٣]

(٣) احسب القيم القصوى للدالة د(س) = ٦ س$^{\frac{4}{3}}$ − ٣ س$^{\frac{1}{3}}$ على الفترة [−١ ، ١] .

(٤) قرر فيما يلي إذا كانت الدالة د(س) = (س − ٢) $\sqrt{س - 1}$ تحقق شرطي نظرية القيمة المتوسطة على ف واحسب جـ حيث (أ) ف = [٠ ، ٢]

(ب) ف = [١ ، ٢]

(٥) أوجد القيم القصوى المحلية للدالة

د(س) = ٢ جاس + جتا٢س ، س ∈ [٠ ، ط]

(٦) قطعنا سلكاً طوله (٨ + ٢ ط) سم إلى قطعتين وصنعنا من الأولى دائرة ومن الثانية مربعاً كيف نقطع السلك ليكون مجموع المساحتين المحصورتين (أ) أصغر ما يمكن ؟

(ب) أكبر ما يمكن؟

(٧) أوجد أقرب نقطة على المنحنى ص = س^2 من النقطة (١٨ ، ٠).

(٨) إذا كانت د متصلة على [أ ، ب] وقابلة للاشتقاق على]أ ، ب[بحيث تكون لكل س ∈]أ ، ب[، دَ(س) ≠ الصفر، فأثبت أن د متباينة على [أ ، ب] .

(إرشاد : استخدم نظرية القيمة المتوسطة) .

الباب السادس

حساب التكامل

٦ ـ ١ نبذة تاريخية

من الذين ساهموا في التمهيد لحساب التكامل العالم المسلم المشهور «الحسن بن الهيثم» ت ٤٣٠ هـ، وقد أثبت كل من «يوسكفيتش» و «روتفلد» أن ابن الهيثم هو الذي أوجد مجموع سلسلتي الأس الثالث والأس الرابع للأعداد الطبيعية، عندما كان يقوم بحساب حجم المجسم الدوراني الناتج من دوران قطعة قائمة من قطع مكافئ حول محور عمودي على محور تماثلها؛ وأن هذه الأعمال قد ساعدت على اكتشاف التفاضل والتكامل.

ولو استعملنا الرموز المعاصرة للعلاقات التي أوجدها ابن الهيثم في هذين المثالين لوجدنا:

$$\sum_{ر=١}^{ن} ر^{٣} = ١^{٣} + ٢^{٣} + ٣^{٣} + \ldots + ن^{٣} = \frac{ن^{٢}(ن+١)^{٢}}{٤}$$

$$\sum_{ر=١}^{ن} ر^{٤} = ١^{٤} + ٢^{٤} + ٣^{٤} + \ldots + ن^{٤} = \left(\frac{ن}{٥} + \frac{١}{٥}\right) ن \left(ن + \frac{١}{٢}\right)\left[(ن+١)ن - \frac{١}{٣}\right]$$

وهذا المجموع هو حل تقريبي للتكامل: $\int_{٠}^{١} س^{٤}\, ءس$

٦ ـ ٢ الدوال الأصلية أو (التكامل غير المحدَّد)

لقد تحدثنا في الباب الرابع من هذا الكتاب عن حساب التفاضل وطريقة إيجاد المشتقة $\frac{ءص}{ءس}$ أو دَ(س) لدالة معطاة ص = د(س)، وفي هذا الجزء نتعرض للعملية العكسية للتفاضل أي إيجاد الدالة إذا عرفت مشتقتها:

فمثلاً لو فرضنا أن د(س) = س^{٢} فإن: دَ(س) = ٢س

لكن ما هي العملية العكسية لعملية الاشتقاق للدالة المعطاة أعلاه؟

الجواب: د(س) = س^{٢}

ندعو كل دالة ناتجة عن العملية العكسية للاشتقاق دالة أصلية. فإذا كانت د(س) تعبر عن دالة معطاة فإن المطلوب إيجاد ل(س) تحقق الشرط: ل$'$(س) = د(س)

تعريف (٦-١)

لتكن د دالة معرفة على الفترة ف (ف مجموعة جزئية من ح). كل دالة ل تحقق العلاقة:

ل$'$(س) = د(س)   لكل س $\in$ ف

تسمى دالة أصلية أو (معكوس المشتقة) للدالة د على ف.

ملحوظة (٦ - ١) :

يتضح من التعريف (٦-١) أن الدالة ل تكون متصلة وقابلة للاشتقاق على الفترة المعطاة ف.

مثال (٦-١)

أوجد دالة أصلية للدالة: د(س) = ٢ ؛ س $\in$ ح

الحـــل :

لقد تعلمنا فيما سبق أنه لو كانت لدينا الدالة ل(س) = ٢س فإن ل$'$(س) = ٢ وعليه فالعملية العكسية لذلك تكون كما يلي: إذا كانت لدينا الدالة د(س) = ٢ فإن ل(س) = ٢س والسؤال الذي يتبادر إلى الذهن: هل ل(س) هي الإجابة الوحيدة؟ يمكن الإجابة عن هذا السؤال من خلال المثال التالي:

مثال (٦-٢)

أوجد مشتقة كل من الدوال الآتية :

(١) د(س) = ٢س .

(٢) د(س) = ٢س + ٣ .

(٣) د(س) = ٢ س − ٥ .

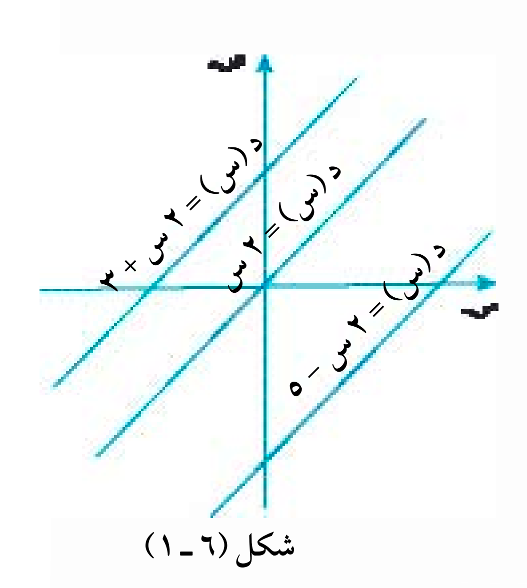
(٤) د(س) = ٢س + ث حيث ث عدد حقيقي ثابت .

الحـــل :

(١) دَ(س) = ٢ .   (٢) دَ(س) = ٢ .   (٣) دَ(س) = ٢ .   (٤) دَ(س) = ٢ .

نستنتج من الحل أنّ جميع الدوال السابقة لها المشتقة نفسها على الرغم من أنّ هذه الدوال مختلفة في مقاديرها الثابتة ، فالدالة الأولى مقدارها الثابت صفر، والدالة الثانية مقدارها الثابت ٣ ، وهكذا.

وعليه يمكننا أن نستنتج الإجابة عن السؤال السابق في المثال (٦-١) بأن كل دالة على الصورة : د(س) = ٢س + ث حيث ث ثابت حقيقي ، هي دالة أصلية للدالة دَ(س) = ٢ . وبالتالي د(س) لا تعبر عن منحنى واحد فقط بل تعبر عن مجموعة كبيرة من المنحنيات التي لها الميل نفسه وتعتمد على قيمة الثابت ث . انظر الشكل (٦-١) .



شكل (٦ ـ ١)

مثال (٦-٣)

إذا كانت د معرّفة كما يلي :

د(س) = ٥س^{٤} لكل س ∈ ح . فإنَّ كلاً من الدوال :

ل$_{١}$(س) = س^{٥} ، ل$_{٢}$(س) = س^{٥} + ٤ ، ل$_{٣}$ = س^{٥} − ٦٣

تكون دالة أصلية مقابلة للدالة د على الفترة (−∞ ، ∞) = ح وذلك لأن :

لَ$_{١}$(س) = لَ$_{٢}$(س) = لَ$_{٣}$(س) = د(س) لكل س ∈ ح

وفي الحقيقة فإنّ كل دالة معطاة بالعلاقة ل(س) = س^{٥} + ث حيث ث عدد حقيقي ثابت هي دالة أصلية للدالة د على ح .

نظرية (٦-١) :

إذا كانت الدالة دَ(س) تساوي صفراً على الفترة [أ ، ب] فإن د تكون ثابتة في الفترة [أ ، ب] .

نظرية (٦-٢)

لتكن الدالة د معرفة على الفترة ف . إذا كانت ل$_{١}$ ، ل$_{٢}$ دالتين أصليتين للدالة د على الفترة ف فإنه يوجد ث ∈ ح بحيث :

ل$_{١}$(س) − ل$_{٢}$(س) = ث لكل س ∈ ف .

البرهـــان :

خذ الدالة ل : ف ⟵ ح المعرّفة كما يلي :

ك(س) = $ت_{1}$(س) − $ت_{2}$(س).

⟸ ك′(س) = $ت'_{1}$(س) − $ت'_{2}$(س).

= د(س) − د(س).

⟸ ك′(س) = صفراً لكل س ∈ ف.

ومن النظرية (٦ – ١) نستنتج أن الدالة ك دالة ثابتة في الفترة ف، أي أنه يوجد ث ∈ ح بحيث يكون:

ك(س) = ث لكل س ∈ ف.

إذن: $ت_{1}$(س) − $ت_{2}$(س) = ث.

نتيجة (٦ – ١)

إذا كانت ت(س) دالة أصلية للدالة د(س) فإن ت(س) + ث هي كذلك دالة أصلية أخرى للدالة د(س)، (ث مقدار ثابت).

ملحوظة (٦ – ٢)

(١) بناءً على النظرية (٦ – ٢) إذا كان للدالة د دالة أصلية ت على الفترة ف فإنه يوجد عدد لا نهائي من الدوال الأصلية للدالة د على الفترة ف تأخذ كل منها الصورة ت(س) + ث حيث ث ثابت اختياري (ث ∈ ح)

تسمى العبارة ت(س) + ث الصورة العامة للدالة الأصلية د(س) أو اختصاراً الدوال الأصلية للدالة د(س).

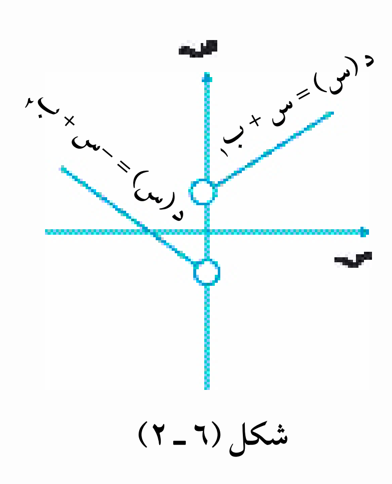
(٢) ليس من الضروري أن يكون لكل دالة معطاة دالة أصلية.

فمثلاً الدالة:

$$
د(س) = \begin{cases} ١ & \text{عندما } س > ٠ \\ ٠ & \text{عندما } س = ٠ \\ -١ & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}
$$

لا يوجد لها دالة أصلية بمعنى أنه لا توجد دالة ل قابلة للاشتقاق على ح بحيث يكون:

$$ل'(س) = د(س) \qquad \text{لكل } س \in ح$$



شكل (٦ ـ ٢)

لأننا لو افترضنا وجود مثل هذه الدالة فإنه:

عندما س > ٠ يجب أن يكون $ل'(س) = ١ \Leftarrow ل(س) = س + ث_١$ ، $ث_١ \in ح$

وعندما س < ٠ يجب أن يكون $ل'(س) = -١ \Leftarrow ل(س) = -س + ث_٢$ ، $ث_٢ \in ح$

أي أن :

$$\text{ت}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^2 + \text{ث}_1 & \text{عندما } \text{س} < 0 \\ -\text{س}^2 + \text{ث}_2 & \text{عندما } \text{س} > 0 \end{cases}$$

انظر الشكل (٦-٢) وهذه الدالة لا يمكن أن تكون قابلة للاشتقاق عندما س = صفراً مهما كانت قيم ث_1 ، ث_2 (لماذا)؟

التكامل غير المحدَّد

سوف نستخدم من الآن فصاعداً الرمز $\int \text{د}(\text{س})\, \text{ءس}$ للدلالة على أي دالة أصلية للدالة د على الفترة ف . فإذا كانت الدالة د معرَّفة على الفترة ف ، ت دالة أصلية للدالة د على ف ، ث ثابتاً اختياريا فإنه تبعاً للنظرية (٦-٢) يكون :

$$\int \text{د}(\text{س})\, \text{ءس} = \text{ت}(\text{س}) + \text{ث} \quad \text{لكل س} \in \text{ف} \quad \Leftrightarrow$$

$$\text{ت}'(\text{س}) = \text{د}(\text{س}) \quad \text{لكل س} \in \text{ف} .$$

وتسمى $\int \text{د}(\text{س})\, \text{ءس}$ الدوال الأصلية ، أو التكامل غير المحدد ، أو معكوس المشتقة ، للدالة د(س) ، ويسمى الثابت الاختياري ث ثابت التكامل . ويجب أن نلاحظ أنه إذا لم نذكر الفترة ف أثناء استخدامنا للعلاقة : $\int \text{د}(\text{س})\, \text{ءس} = \text{ت}(\text{س}) + \text{ث}$ ، فإن هذا يعني أننا نفترض أن ت دالة أصلية للدالة د على أي فترة تكون كلتاهما معرفة عليها .

وباستخدام التعريف $\int \text{د}(\text{س})\, \text{ءس}$ السابق يمكن بسهولة إثبات النظرية التالية :

نظرية (٦ ـ ٣)

(١) إذا كانت ق(س) دالة أصلية للدالة د(س) فإن: ق′(س) = د(س).

(٢) $\int$ د′(س) دس = د(س) + ث .

(٣) $\int$ أ د(س) دس = أ $\int$ د(س) دس لكل أ ∈ ح − {٠}

(٤) $\int$ (د₁(س) ± د₂(س)) دس = $\int$ د₁(س) دس ± $\int$ د₂(س) دس

مثال (٦-٤)

أوجد الدوال الأصلية للدالة: د(س) = −٣٢ ، س ∈ ح .

الحـــل :

الدوال الأصلية ق(س) = −٣٢س + ث

ونعبّر عن ذلك: $\int$ −٣٢ دس = $\int$ (−٣٢س) ، س

وبالتالي: $\int$ −٣٢ دس = −٣٢س + ث

مثال (٦-٥)

أوجد في كل مما يلي الدوال الأصلية للدالة المعطاة في الفترة المبيّنة:

(أ) د(س) = ١ ، س ∈ ح . (ب) د(س) = $س^{٤}$ ، س ∈ ح .

(ج) د(س) = $٣س^{٢}$ + ٢س + ٥ ، س ∈ ح . (د) د(س) = ٤ $\sqrt{س}$ ، س ∈ ح .

الحــل :

(أ) الدوال الأصلية : $\int د(س)\, ءس = \int ١\, ءس = \int س^{٠}\, ءس = س + ث$.

(ب) الدوال الأصلية :

$$\int د(س)\, ءس = \int س^{-٢}\, ءس = \frac{س^{-١}}{-١} + ث$$.

(ج) الدوال الأصلية :

$$\int د(س)\, ءس = \int ٣س^{٢}\, ءس + \int ٢س\, ءس + \int ٥\, ءس$$

$$= ٣\int س^{٢}\, ءس + ٢\int س\, ءس + ٥\int ءس$$

$$= س^{٣} + س^{٢} + ٥س + ث$$.

(د) الدوال الأصلية :

$$\int د(س)\, ءس = \int ٤\sqrt[٣]{س}\, ءس = \int ٤س^{\frac{١}{٣}}\, ءس$$

$$= \int (٤س^{\frac{١}{٣}})\, ءس \qquad لماذا؟$$

$$= ٣س^{\frac{٤}{٣}} + ث = ٣\sqrt[٣]{س^{٤}} + ث$$.

تدريب (٦-١)

أوجد :

(١) $\int س^{ن}\, ءس$ (٢) $\int س^{٢}\, ءس$

مثال (٦-٦)

أوجد $\int جاس\, ءس$

الحــل :

نبحث عن دالة د(س) تحقق الشرط دَ(س) = جاس

فيكون الجواب : د(س) = ⁻جتاس

إذن : ∫ جاس ءس = ⁻جتاس + ث

مثال (٦-٧)

أوجد ∫ جتاس ءس .

الحــل :

نبحث عن دالة تكون مشتقتها دَ(س) = جتاس

فيكون الجواب ∫ جتاس ءس = جاس + ث

مثال (٦-٨)

أوجد ∫ قا^{2}س ءس

الحــل :

نبحث عن دالة تكون مشتقتها دَ(س) = قا^{2}س

فيكون الجواب د(س) = ظاس

إذن : د(س) = ∫ قا^{2}س ءس = ظاس + ث .

تدريب (٦-٢)

أوجد ∫ ظتا٢ س ءس

مثال (٦-٩)

أوجد ∫ قاس ظاس ءس

الحـــل :

نبحث عن دالة تكون مشتقتها د(س) = قاس ظاس .

فيكون الجواب د(س) = قاس .

إذن د(س) = ∫ قاس ظاس ءس = قاس + ث   (٦-٧)

تدريب (٦-٣)

أوجد ∫ قتاس ظتاس ءس

جدول لبعض التكاملات غير المحددة الأساسية :

نستنتج من الأمثلة السابقة الجدول التالي ، ويعرف بجدول الدوال الأصلية (التكاملات غير المحددة) لبعض الدوال الأساسية ويستطيع الطالب أن يضيف إلى هذا الجدول دوال أخرى مع تكاملاتها :

(١) ∫ ءس = س + ث .   (٦-١)

(٢) ∫ سن ءس = سن+١ / (ن + ١) + ث حيث ن ∈ ح − {−١} .   (٦-٢)

(٣) ∫ جاس ءس = − جتاس + ث .   (٦-٣)

(٤) ∫ جتاس ءس = جاس + ث .   (٦-٤)

(٥) $\int$ قا² س ء س = ظا س + ث . (٦-٥)

(٦) $\int$ قتا² س ء س = − ظتا س + ث . (٦-٦)

(٧) $\int$ قا س ظا س ء س = قا س + ث . (٦-٧)

(٨) $\int$ قتا س ظتا س ء س = − قتا س + ث . (٦-٨)

حيث ث ∈ ح ، ح هي مجموعة الأعداد النسبية .

مثال (٦-١٠)

أوجد $\int$ (س³ − ٤ س² + ١٠) ء س .

الحـــل :

باستخدام جدول التكاملات غير المحددة الأساسية نحصل على :

$\int$ س³ ء س = $\frac{\text{س}^{٣+١}}{٣+١}$ + ث₁ = $\frac{١}{٤}$ س⁴ + ث₁ .

$\int$ −٤ س² ء س = −٤ $\int$ س² ء س = −٤ × $\frac{\text{س}^٣}{٣}$ + ث₂ .

$\int$ ١٠ ء س = ١٠ $\int$ ء س = ١٠ س + ث₃ .

$\int$ (س³ − ٤ س² + ١٠) ء س = $\int$ س³ ء س + $\int$ −٤ س² ء س + $\int$ ١٠ ء س

= $\frac{١}{٤}$ س⁴ + ث₁ − $\frac{٤}{٣}$ س³ + ث₂ + ١٠ س + ث₃ .

= $\frac{١}{٤}$ س⁴ − $\frac{٤}{٣}$ س³ + ١٠ س + ث .

حيث $ث = ث_١ + ث_٢ + ث_٣$.

مثال (٦-١١)

أوجد التكامل غير المحدد $\int \frac{(س^٢ - ٤)^٢}{\sqrt{س}}\, دس$ مع ذكر أكبر فترة تكون فيها الإجابة صحيحة .

الحل :

$$\int \frac{(س^٢ - ٤)^٢}{\sqrt{س}}\, دس = \int \frac{س^٤ - ٨س^٢ + ١٦}{س^{\frac{١}{٢}}}\, دس$$

$$= \int (س^{\frac{٧}{٢}} - ٨س^{\frac{٣}{٢}} + ١٦س^{-\frac{١}{٢}})\, دس$$

وبإيجاد التكامل غير المحدَّد لكل حد ينتج أنَّ :

$$\int \frac{(س^٢ - ٤)^٢}{\sqrt{س}}\, دس = \frac{٢}{٩}س^{\frac{٩}{٢}} - \frac{١٦}{٥}س^{\frac{٥}{٢}} + ٣٢س^{\frac{١}{٢}} + ث \text{ ،} \qquad س > ٠ \text{ ،}$$

$$\Leftarrow ف = (٠ ، \infty)$$

مثال (٦-١٢)

أوجد $\int (س^٢ - ١)^٢ (س + ٣)\, دس$ مع ذكر أكبر فترة تكون فيها الإجابة صحيحة .

الحل :

$$\int (س^٢ - ١)^٢ (س + ٣)\, دس = \int (س^٥ + ٣س^٤ - ٢س^٣ - ٦س^٢ + س + ٣)\, دس$$

$$= \frac{س^٦}{٦} + ٣ \times \frac{س^٥}{٥} - ٢ \times \frac{س^٤}{٤} - ٦ \times \frac{س^٣}{٣} + \frac{س^٢}{٢} + ٣س + ث \text{ ،}$$

$س \in ح \Leftarrow ف = ح$

تدريب (٦-٤)

أوجد $\int (س^٢ - ٢)(س^٢ + ٢)\, دس$ مع ذكر أكبر فترة تكون فيها الإجابة صحيحة .

تمارين (٦ – ١)

أوجد ما يلي مع ذكر أكبر فترة تكون فيها الإجابة صحيحة :

(١) $\int$ س^{٧} ءس . (٢) $\int$ ٤ ءس . (٣) $\int$ ٦س^{٢} ءس .

(٤) $\int \frac{٤}{\text{س}}$ ءس . (٥) $\int$ ٣$\sqrt{\text{س}}$ ءس . (٦) $\int$ (٤س^{٣} − ٣س^{٢}) ءس .

(٧) $\int$ (٣س^{٢} − ٢س + ٣) ءس . (٨) $\int$ (٢س − ٣) (٣س + ١) ءس .

(٩) $\int$ (٢ − قا^{٢}س) ءس . (١٠) $\int$ (جتاس + ٤س) ءس .

(١١) $\int$ (٣ + قتاس ظتاس) ءس . (١٢) $\int$ (س^{٢} + ٢) (س^{٢} − ٣) ءس .

(١٣) $\int$ (س^{٢} − ٥س + ٣)^{٢} ءس . (١٤) $\int \frac{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦}{\text{س} - ٣}$ ءس .

(١٥) $\int \frac{\text{س}^{٣} - ٢٧}{\text{س} - ٣}$ ءس . (١٦) $\int$ (س^{٢} + $\frac{٢}{\text{س}^{٢}}$) ءس .

(١٧) $\int$ (س + ٣)^{٤} ءس . (١٨) $\int \frac{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ١}{\sqrt{\text{س}}}$ ءس .

(١٩) أثبت أن الدالة ل(س) = $\sqrt{١٦ - \text{س}^{٢}}$ هي دالة أصلية للدالة د(س) = $\frac{-\text{س}}{\sqrt{١٦ - \text{س}^{٢}}}$

حيث س $\in$ (−١ ، ١)

(٢٠) أثبت أن الدالة ل(س) = س$^{-٢}$ هي دالة أصلية للدالة

د(س) = −٢س$^{-٣}$ في الفترة [٢ ، ٥] .

(٢١) إذا كانت دَ(س) = ٢جتاس − ٣جاس فأوجد د(س) علماً بأن د($\frac{ط}{٢}$) = $\sqrt{٣}$.

٦ – ٣ التكامل بالتعويض

في كثير من مسائل التكامل غير المحدد مثل التكاملات $\int (٢س + ٣)^{\frac{٧}{٢}} ءس$ ، $\int س\sqrt{١٧ - س^{٢}} ءس$ ،
وغيرها تجد أن التكاملات المعطاة ليست على إحدى الصور التي يتضمنها جدول التكاملات غير المحددة الأساسية ، ورغم ذلك فإنه في بعض الأحيان يمكن تحويل هذه التكاملات إلى إحدى الصور الأساسية ، مستخدمين في ذلك طرائق عدة وسوف نكتفي في دراستنا هنا بذكر إحدى هذه الطرائق وهي طريقة التكامل بالتعويض .

إذا كان المطلوب إيجاد التكامل $\int (٢س + ٣)^{\frac{٧}{٢}} ءس$ في ضوء معلوماتنا السابقة ، نفرض أنَّ :

$$ص = ٢س + ٣$$

ومن العلاقة (٤ – ١٩) – تعريف التفاضل – نجد أنَّ :

$$ءص = ص' ءس \quad \text{أي أنَّ :} \quad ءص = ٢ءس \Leftarrow ءس = \frac{١}{٢} ءص$$

وبالتعويض في التكامل المطلوب إيجاده يكون :

$$\int (٢س + ٣)^{\frac{٧}{٢}} ءس = \int ص^{\frac{٧}{٢}} \times \frac{١}{٢} ءص$$

$$= \frac{١}{٢} \int ص^{\frac{٧}{٢}} ءص \quad \text{وبتطبيق القاعدة (٦ – ٢)}$$

$$= \frac{١}{٢} \times \frac{ص^{\frac{٩}{٢}}}{\left(\frac{٩}{٢}\right)} + ث$$

$$= \frac{١}{٩} ص^{\frac{٩}{٢}} + ث \quad \text{وبالعودة إلى المتغير س نجد :}$$

$$\int (٢س + ٣)^{\frac{٧}{٢}} ءس = \frac{١}{٩} (٢س + ٣)^{\frac{٩}{٢}} + ث .$$

وهكذا استطعنا باستخدام التعويض ص = ٢س − ٣ تحويل التكامل $\int$ (٢س − ٣)$^{\frac{٤}{٣}}$ ءس إلى تكامل يسهل إيجاده بالاعتماد على التكاملات الأساسية .

ولكي نلخص هذه الطريقة التي تسمى كما قلنا طريقة التكامل بالتعويض (لأننا عوضنا عن المتغير س بالمتغير ص) ، نفرض أن المطلوب هو إيجاد $\int$ د(س) ءس ، وأننا لا نعرف دالة أصلية مقابلة للدالة د فنتبع ما يلي :

(١) نبحث عن دالة جديدة ـه(ص) بحيث يعطينا التعويض س = ـه(ص) تكاملاً جديداً قابلاً للحساب المباشر.

(٢) نعبر عن د(س) بدلالة المتغير الجديد ، فيكون : د(س) = د(ـه(ص))

(٣) نعبّر عن ءس بدلالة ءص من العلاقة : ءص = صَ ءس $\Leftarrow$ ءس = $\frac{١}{صَ}$ ءص

(٤) نعوض في التكامل الأول فنحصل على $\int$ د(س) ءس بدلالة ص ، ءص ، مما يساعدنا على إجراء عملية التكامل بصورة مباشرة تطبيقاً للقواعد الأساسية التي ذكرناها آنفاً .

مثال (٦-١٣)

أوجد $\int$ س $\sqrt{١ - س}$ ءس .

الحــل :

لنفرض أن : ١ − س = ص $\Leftarrow$ س = (١ − ص) . (٦-٩)

وبالتالي : ءس = − ءص ،

و د(س) = د(١ − ص)

= (١ − ص) $\sqrt{ص}$

$$= ص^{\frac{1}{2}} - ص^{\frac{3}{2}}$$

إذن: $\int س\sqrt{1-س}\, دس = \int (ص^{\frac{1}{2}} - ص^{\frac{3}{2}})(-1)\, دص$

$$= \int (ص^{\frac{3}{2}} - ص^{\frac{1}{2}})\, دص$$

$$= \frac{2}{5} ص^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} ص^{\frac{3}{2}} + ث.$$

أي أنَّ: $\int س\sqrt{1-س}\, دس = \frac{2}{5}(1-س)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(1-س)^{\frac{3}{2}} + ث.$

مثال (٦-١٤)

أوجد: $\int \frac{1}{(8-3س)^2}\, دس.$

الحـــل :

نضع $8 - 3س = ص$ فيكون $دص = (8 - 3س)' دس = -3دس$

$\therefore دس = -\frac{1}{3} دص$

بالتعويض في التكامل نجد أنَّ:

$$\int \frac{1}{(8-3س)^2}\, دس = \int \frac{1}{ص^2}(-\frac{1}{3})\, دص = -\frac{1}{3}\int ص^{-2}\, دص$$

$$= -\frac{1}{3} \times \frac{ص^{-1}}{-1} + ث.$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{ص} + ث.$$

أي أنَّ: $\int \frac{1}{(8-3س)^2}\, دس = \frac{1}{3} \times \frac{1}{(8-3س)} + ث.$

مثال (٦-١٥)

أوجد $\int$ جا ٣س دس .

الحـــل :

نبحث عن الدالة د(س) التي تحقق الشرط دَ(س) = جا٣س .

نفرض أن ٣س = ص

إذن ٣دس = دص ، أي أنّ : دس = $\frac{١}{٣}$ دص .

إذن $\int$ جا٣س دس = $\int$ جاص ($\frac{١}{٣}$ دص) .

ومن جدول التكاملات نجد أن : $\frac{١}{٣}$ $\int$ جاص دص = − $\frac{١}{٣}$ جتاص + ث .

أي أن : $\int$ جا٣س دس = − $\frac{١}{٣}$ جتا٣س + ث .

تدريب (٦-٥)

أوجد $\int$ جتا ٤س دس .

مثال (٦-١٦)

أوجد $\int$ قا^{٢} ٥س دس .

الحـــل :

نفرض ٥س = ص فيكون ٥دس = دص أي أن دس = $\frac{١}{٥}$ دص ويصبح التكامل على الصورة

∫ قا٢ص (١/٥ ءص) = ١/٥ ∫ قا٢ص ءص

ومن جدول التكاملات نجد أن: ١/٥ ∫ قا٢ص ءص = ١/٥ ظاص + ث.

إذن: ∫ قا٢٥س ءس = ١/٥ ظا٥س + ث.

مثال (٦-١٧)

أوجد ∫ قتا٢٢س ءس.

الحـــل :

نفرض أن ٢س = ص فيكون ٢ءس = ءص أي أن ءس = ١/٢ ءص ويصبح التكامل على الصورة:

∫ قتا٢٢س ءس = ∫ قتا٢ص (١/٢ ءص) = ١/٢ ∫ قتا٢ص ءص ومن جدول التكاملات نجد:

١/٢ ∫ قتا٢ص ءص = − ١/٢ ظتا ص + ث.

إذن: ∫ قتا٢٢س ءس = − ١/٢ ظتا٢س + ث.

تدريب (٦-٦)

أوجد ∫ قا٧س ظا٧س ءس.

مثال (٦-١٨)

أوجد ∫ قتا٨س ظتا٨س ءس.

الحـــل :

$\int$ قتا^{8}س ظتا^{8}س ءس = $-\frac{1}{8}$ قتا^{8}س + ث (لماذا؟)

ملحوظة (٦ - ٣)

بالإمكان حل الأمثلة من (٦-١٤) حتى (٦-١٨) باستخدام الحقيقة التالية التي يمكن التحقق منها بسهولة :

إذا كان $\int$ د(س) ءس = ل(س) + ث .

فإن : $\int$ د(أس + ب) ءس = $\frac{1}{أ}$ ل(أس + ب) + ث (٦-١٠)

مثال (٦-١٩)

أوجد $\int$ جا (٢س - ٥) ءس .

الحـــل :

من جدول التكاملات الأساسية نعلم أنّ : $\int$ جاس ءس = - جتاس + ث .

وباستخدام (٦-١٠) : $\int$ جا (٢س - ٥) ءس = $-\frac{1}{2}$ جتا (٢س - ٥) + ث .

تدريب (٦-٧)

باستخدام (٦ - ١٠) أوجد : $\int$ (١ - ٣س)^{٩} ءس

في ضوء ما درسناه في الأمثلة السابقة نستطيع أن نضع جدول التكاملات التالي :

(١) $\int$ جا أس ءس = $-\frac{1}{أ}$ جتا أس + ث (٦-١١)

(٢) $\int \text{جتا أس ءس} = \frac{1}{\text{أ}}\ \text{جا أس} + \text{ث}$ (٦-١٢)

(٣) $\int \text{قا}^{2}\text{أس ءس} = \frac{1}{\text{أ}}\ \text{ظا أس} + \text{ث}$ (٦-١٣)

(٤) $\int \text{قتا}^{2}\text{أس ءس} = -\frac{1}{\text{أ}}\ \text{ظتا أس} + \text{ث}$ (٦-١٤)

(٥) $\int \text{قا أس ظا أس ءس} = \frac{1}{\text{أ}}\ \text{قا أس} + \text{ث}$ (٦-١٥)

(٦) $\int \text{قتا أس ظتا أس ءس} = -\frac{1}{\text{أ}}\ \text{قتا أس} + \text{ث}$ (٦-١٦)

حيث ث $\in$ ح ، أ $\neq$ صفراً.

مثال (٦-٢٠)

أوجد التكامل غير المحدود $\int \text{قا}\ \frac{2}{5}\text{س ظا}\ \frac{2}{5}\text{س ءس}$

الحــل :

$\int \text{قا}\ \frac{2}{5}\text{س ظا}\ \frac{2}{5}\text{س ءس} = \frac{1}{\frac{2}{5}}\ \text{قا}\ \frac{2}{5}\text{س} + \text{ث}$. من (٦-١٥)

$= \frac{5}{2}\ \text{قا}\ \frac{2}{5}\text{س} + \text{ث}$.

مثال (٦-٢١)

أوجد $\int \text{قا}^{2}\ \sqrt{3}\ \text{س ءس}$.

الحــل :

$\int$ قا² $\sqrt{3}$ س ء س = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ظا $\sqrt{3}$ س + ث ، من (٦-١٣)

من الواضح أن جدول التكاملات غير المحددة الأساسية لا يحتوي على التكاملات .

$\int$ جا² س ء س ، $\int$ جتا² س ء س ، $\int$ قتا² س ء س ، $\int$ ظتا² س ء س

ولكن باستخدام العلاقات التالية على الترتيب والتي تعرفها من دراستك لحساب المثلثات :

جا² س = $\frac{1}{2}$ (١ − جتا ٢س) ، جتا² س = $\frac{1}{2}$ (١ + جتا ٢س) ،

ظا² س + ١ = قا² س ، ظتا² س + ١ = قتا² س .

يمكن تحويل كل من التكاملات السابقة إلى تكاملات قياسية يسهل إيجادها .

مثال (٦-٢٢)

أوجد $\int$ جا² س ء س .

الحــل :

لعلك تلاحظ أن :

$\int$ جا² س ء س = $\frac{1}{2}$ $\int$ (١ − جتا ٢س) ء س .

= $\frac{1}{2}$ (س − $\frac{1}{2}$ جا ٢س) + ث ، من (٦-١٢)

مثال (٦–٢٣)

أوجد التكامل ∫ جتا^{٢} ٣س ءس .

الحـــل :

لاحظ أن : جتا^{٢} ٣س = $\frac{١}{٢}$ (١ − جتا٦س) .

ويكون ∫ جتا^{٢} ٣س ءس = $\frac{١}{٢}$ ∫ (١ + جتا٦س) ءس .   ومن (٦–١٢) :

= $\frac{١}{٢}$ س + $\frac{١}{١٢}$ جا٦س + ث .

مثال (٦–٢٤)

أوجد ∫ ظا^{٢} ٤س ءس .

الحـــل :

لعلك تلاحظ أنّ : ظا^{٢} ٤س = قا^{٢} ٤س − ١ .

إذن : ∫ ظا^{٢} ٤س ءس = ∫ (قا^{٢} ٤س − ١) ءس = $\frac{١}{٤}$ ظا٤س − س + ث .

تدريب (٦–٨)

أوجد ∫ ظا^{٢} ٣س ءس .

نتيجة (٦ – ٢)

إذا كانت الدالة د قابلة للاشتقاق على الفترة ف وكان ن $\in$ ح $-\{-1\}$ فإن:

$$\int [\text{د}(\text{س})]^{\text{ن}}\, \text{د}'(\text{س})\, \text{دس} = \frac{[\text{د}(\text{س})]^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{ث} \quad \text{لكل س} \in \text{ف} \qquad (٦-١٧).$$

ويمكن إثبات هذه النتيجة باستخدام التعويض ص = د(س) مباشرة.

مثال (٦–٢٥)

أوجد $\int \sqrt{\text{س}^2+1}\ (2\text{س})\ \text{دس}$.

الحـــل :

نعيد كتابة التكامل المطلوب إيجاده كما يلي:

$$\int \sqrt{\text{س}^2+1}\ (2\text{س})\ \text{دس} = \int (\text{س}^2+1)^{\frac{1}{2}}\ (2\text{س})\ \text{دس}$$

وبتطبيق (٦–١٧) حيث د(س) = س^2+1، د'(س) = ٢س ، ن = $\frac{1}{2}$ يتضح أن:

$$\int \sqrt{\text{س}^2+1}\ (2\text{س})\ \text{دس} = \frac{(\text{س}^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{3}{2}\right)} + \text{ث}.$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{(\text{س}^2+1)^3} + \text{ث}.$$

مثال (٦-٢٦)

أوجد $\int \frac{س^{٢}}{\sqrt{س^{٣}+٥}}\, دس$.

الحــل :

$$\int \frac{س^{٢}}{\sqrt{س^{٣}+٥}}\, دس = \int (س^{٣}+٥)^{-\frac{١}{٢}} (س^{٢})\, دس$$

$$= \frac{١}{٣} \int (س^{٣}+٥)^{-\frac{١}{٢}} (٣س^{٢})\, دس$$

$$= \frac{١}{٣} \frac{(س^{٣}+٥)^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + ث$$ بتطبيق (٦-١٧)

$$= \frac{٢}{٣} \sqrt{س^{٣}+٥} + ث$$.

مثال (٦-٢٧)

أوجد $\int جتا^{٣} ٢س \; جا ٢س \; دس$

الحــل :

$$\int جتا^{٣} ٢س \; جا ٢س \; دس = \int (جتا ٢س)^{٣} \; جا ٢س \; دس$$

$$= -\frac{١}{٢} \int (جتا ٢س)^{٣} (-٢ جا ٢س)\, دس = -\frac{١}{٢} \frac{(جتا ٢س)^{٤}}{٤} + ث$$ حسب (٦-١٧)

$$= -\frac{١}{٨} جتا^{٤} ٢س + ث$$

تدريب (٦-٩)

أوجد $\int$ جا^{٢}٣س جتا٣س ءس .

مثال (٦-٢٨)

أوجد $\int$ جتا^{٣}س ءس .

الحـــل :

$\int$ جتا^{٣}س ءس = $\int$ جتا^{٢}س جتاس ءس

= $\int$ (١ − جا^{٢}س) جتاس ءس

= $\int$ جتاس ءس − $\int$ جا^{٢}س جتاس ءس   (لأن جا^{٢}س + جتا^{٢}س = ١)

= جاس − $\frac{١}{٣}$ جا^{٣}س + ث .

في ضوء المثالين السابقين يمكن استنتاج القاعدتين التاليتين :

(١) $\int$ جا^{ن} د(س) جتا د(س) دَ(س) ءس = $\frac{\text{جا}^{ن+١}\ \text{د(س)}}{ن + ١}$ + ث ، ن ≠ −١   (٦-١٨)

(٢) $\int$ جتا^{ن} د(س) جا د(س) دَ(س) ءس = $\frac{-\text{جتا}^{ن+١}\ \text{د(س)}}{ن + ١}$ + ث ، ن ≠ −١   (٦-١٩)

تمارين (٦ – ٢)

أوجد التكاملات التالية :

(١) $\int س \sqrt{٢ - س}\ دس$.

(٢) $\int س^٣ \sqrt{٢ - س}\ دس$.

(٣) $\int (س + ٢) \sqrt{٥ - س}\ دس$.

(٤) $\int \frac{١}{(٢س + ١)^٢}\ دس$.

(٥) $\int (١ - ٢س)\ دس$.

(٦) $\int \frac{١}{\sqrt{٣س} - ١}\ دس$.

(٧) $\int \sqrt{٨ - ٦س}\ دس$.

(٨) $\int جتا\,(١ - ٣س)\ دس$.

(٩) $\int جا\,(٢س + ٥)\ دس$.

(١٠) $\int قا^٢\,(١ - ٢س)\ دس$.

(١١) $\int قتا^٢\,(٤س + ٣)\ دس$.

(١٢) $\int قا\,(٣س + ١)\ ظا\,(٣س + ١)\ دس$.

(١٣) $\int قتا\,(٢ - ٥س)\ ظتا\,(٢ - ٥س)\ دس$.

(١٤) $\int (هـ - ٣س)^٢\ دس$.

(١٥) $\int (٣ + ٧س)^{\frac{٢}{٣}}\ دس$.

(١٦) $\int جا^٢\,(٢س + ١)\ دس$.

(١٧) $\int جتا^٢\,(٢ - س)\ دس$.

(١٨) $\int ظا^٢\,٣س\ دس$.

(١٩) $\int ظتا^٢\,٥س\ دس$.

(٢٠) $\int ظا^٢\,(٤ - ٢س)\ دس$.

(٢١) $\int \frac{س^٢ + ١}{\sqrt{س^٣ + ٣س - ٢}}\ دس$.

(٢٢) $\int \frac{جاس}{جتا^٢س}\ دس$.

(٢٣) $\int \frac{٣س}{(٤ + س^٢)^٣}\ دس$.

(٢٤) $\int (ظاس - ٣)^٢\ قا^٢س\ دس$.

(٢٥) $\int \frac{٢ - جاس}{(٢س + جتاس)^٢}\ دس$.

(٢٦) $\int \sqrt{جاس - ٣}\ جتاس\ دس$.

(٢٧) $\int جتا^٤س\ جاس\ دس$.

(٢٨) $\int ظاس\ قا^٢س\ دس$.

(٢٩) $\int ظتا^٢س\ قتا^٢س\ دس$.

(٣٠) $\int س \sqrt{س^٢ - ٣}\ دس$.

٦ - ٤ تطبيقات على التكامل غير المحدَّد

سوف نوجه اهتمامنا لبعض التطبيقات الهندسية والفيزيائية للتكامل غير المحدّد .

أولاً : تطبيقات هندسية :

إذا كانت ص = د(س) تمثل معادلة منحنٍ معطى فإننا نحصل على ميله م (أي ميل مماسه) عند أي نقطة اختيارية عليه أ (س ، ص) عن طريق حساب المشتقة الأولى للدالة د أي أن :

م = دَ(س) .

وبالعكس ، إذا أعطينا المعادلة م = $\frac{دص}{دس}$ = دَ(س) التي تمثل ميل منحنٍ ما ، فإننا نحصل عن طريق التكامل على مجموعة المنحنيات ص = د(س) + ث التي لها الميل نفسه . ولكي نحصل على منحنٍ معيّن من هذه المجموعة ينبغي أن نعيّن قيمة الثابت ث وذلك عن طريق اشتراط مروره (أي المنحنى) بنقطة معينة .

مثال (٦-٢٩)

أوجد معادلة مجموعة المنحنيات التي ميلها عند أي نقطة اختيارية (س ، ص) يساوي ٢س ثم أوجد من بينها المنحنى الذي يمر بالنقطة (١ ، ١) .

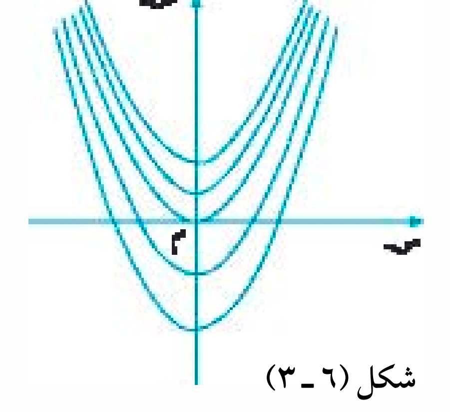
الحـــل :

∵ $\frac{دص}{دس}$ = ٢س ∴ دص = ٢س دس

وبتكامل الطرفين ينتج :

ص = ∫ ٢س دس

∴ ص = $س^٢$ + ث



شكل (٦ ـ ٣)

ولعلّك تدرك أن هذه المعادلة تمثل مجموعة من القطوع المكافئة ، انظر الشكل (٦-٣)
وللحصول على معادلة المنحني الذي يمر بالنقطة (١ ، ١)

نضع ص = ١ و س = ١ في المعادلة ص = $س^2$ + ث .

لنحصل على ١ = ١ + ث ، فيكون ث = صفراً.

أي أن معادلة المنحني المطلوب هي : ص = $س^2$

مثال (٦-٣٠)

إذا كان عند أي نقطة (س ، ص) على منحني الدالة ص = د(س): $\frac{ٮ^2ص}{ٮس^2} = ٢ (٦س^2 - ١)$
فأوجد معادلة المنحني ، علماً بأنه يمر بالنقطة (١ ، ٧) وميل مماسه في هذه النقطة يساوي ٧.

الحــل :

حيث إن $\frac{ٮ}{ٮس}\left(\frac{ٮص}{ٮس}\right) = ٢ (٦س^2 - ١) = ١٢س^2 - ٢$

إذن باستخدام النظرية (٦-٣) يكون :

$$\frac{ٮص}{ٮس} = \int (١٢س^2 - ٢)\,ٮس$$

$$= ٤س^3 - ٢س + ث_1$$

ولتعيين $ث_1$ نستخدم المعلومة $\left[\frac{ٮص}{ٮس}\right]_{(١،٧)} = ٧$ فينتج أنّ :

٧ = ٤ × $١^{٣}$ − ٢ × ١ + $ث_{١}$

إذن $ث_{١}$ = ٥ .

ومنه $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$ = ٤$س^{٣}$ − ٢س + ٥

وباستخدام النظرية (٤-٦-٣) مرة أخرى ينتج أن:

ص = ∫ (٤$س^{٣}$ − ٢س + ٥) دس ، أي:

ص = $س^{٤}$ − $س^{٢}$ + ٥س + $ث_{٢}$ ...... (٦-٢٠)

وحيث إن النقطة (١ ، ٧) تقع على منحنى الدالة ص = د(س) فإنه يمكن تعيين الثابت $ث_{٢}$ وذلك بالتعويض في (٦-٢٠) كما يلي:

٧ = $١^{٤}$ − $١^{٢}$ + ٥ × ١ + $ث_{٢}$

إذن: $ث_{٢}$ = ٢

وباستخدام (٦-٢٠) ينتج أن معادلة المنحنى هي:

ص = $س^{٤}$ − $س^{٢}$ + ٥س + ٢

مثال (٦-٣١)

إذا كان $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$ = $س^{٢}$ − ١ عند كل نقطة (س ، ص) من منحنى ما فأوجد معادلة المنحنى الذي يمر بالنقطة (١ ، ١) ويمس المستقيم س + ٢ص = ٣ عند النقطة (١ ، ١).

الحـــل :

بما أن: $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$ = $س^{٢}$ − ١

إذن $\frac{d\text{ص}'}{d\text{س}} = \int (\text{س}^2 - 1)\, d\text{س} = \frac{\text{س}^3}{3} - \text{س} + \text{ث}$

وحيث إن الميل $\text{ص}' = \frac{d\text{ص}}{d\text{س}}$ للمنحنى عند النقطة (١ ، ١) يساوي $-\frac{1}{2}$ وهو ميل المستقيم المعطى .

فلإيجاد الثابت ث، نعوض في العلاقة السابقة فنحصل على :

$$-\frac{1}{2} = \frac{1}{3} - 1 + \text{ث}_1 \Leftarrow \text{ث}_1 = \frac{1}{6}$$

وتصبح العلاقة السابقة كما يلي : $\text{ص}' = \frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \frac{1}{3}\text{س}^3 - \text{س} + \frac{1}{6}$

لذلك : $\text{ص} = \int \frac{d\text{ص}}{d\text{س}}\, d\text{س}$

$$= \int \left(\frac{1}{3}\text{س}^3 - \text{س} + \frac{1}{6}\right) d\text{س}$$

$$= \frac{1}{12}\text{س}^4 - \frac{1}{2}\text{س}^2 + \frac{1}{6}\text{س} + \text{ث}_2$$

ولإيجاد الثابت نعوض بإحداثيات النقطة في العلاقة السابقة فنحصل على :

$$1 = \frac{1}{12} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \text{ث}_2$$

فتكون $\text{ث}_2 = \frac{5}{4}$

وتصبح معادلة المنحنى المطلوبة هي :

$$\text{ص} = \frac{1}{12}\text{س}^4 - \frac{1}{2}\text{س}^2 + \frac{1}{6}\text{س} + \frac{5}{4}$$

ثانياً : تطبيقات فيزيائية :

إذا كانت ف تمثل إزاحة (المسافة الموجهة) جسم ما عن نقطة ثابتة على مساره (في اتجاه مستقيم) عند اللحظة ن فإن المعادلة ف = د (ن) تعين حركة الجسم تماماً ونحصل على سرعة الجسم ع من المشتقة الأولى لدالة الإزاحة ف ، وتسارعه (ت) من المشتقة الأولى للسرعة (أي المشتقة الثانية للإزاحة).

ونعبر عن ذلك كما يلي : ع = $\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}$ = ف َ (ن)

و ت = $\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$ = $\frac{\text{د}^2\text{ف}}{\text{د ن}^2}$ = ف ً (ن)

وبالعكس بمكاملة السرعة نحصل على الإزاحة وبمكاملة التسارع نحصل على السرعة.

أي أنَّ : ف = ∫ ع د ن

و ع = ∫ ت د ن

مثال (٦-٣٢)

يتحرك جسم على خط مستقيم بدءاً من نقطة الأصل عند اللحظة ن = صفراً بسرعة ع = ٤ن + ١ أوجد الإزاحة التي يقطعها الجسم خلال المدة من ن = صفراً إلى ن = ٤.

الحـــل :

ف = ∫ ع د ن = ∫ (٤ن + ١) د ن

ومنه: ف = ٢ ن٢ + ن + ث ، ث ∈ ح

عند اللحظة ن = صفراً تكون ف = صفراً. إذن ث = صفراً وبالتالي فإن : ف = ٢ن٣ + ن

وعندما ن = ٤ فإن ف = ٣٦ وحدة طول .

مثال (٦-٣٣)

يتحرك جسيم في خط مستقيم بتسارع ت = ٦ن - ٤ حيث ن هو الزمن بالثواني . أوجد العلاقة بين السرعة والزمن علماً بأن سرعته بعد ٣ ثوانٍ من بدء الحركة كانت ٢١ متراً/ثانية ثم أوجد الإزاحة ف التي يقطعها بعد زمن ن من بدء الحركة (علماً بأن الجسيم بدأ حركته من نقطة الأصل في اللحظة ن = صفر).

الحــل :

بما أن التسارع ت = $\frac{دع}{دن}$ حيث ع هي السرعة . إذن ع = ∫ ت د ن .

= ∫ (٦ن - ٤) د ن . = ٣ن٢ - ٤ن + ث١ .

ولإيجاد الثابت ث١ نجعل ع = ٢١ عند ن = ٣ في العلاقة السابقة نحصل على :

٢١ = ٢٧ - ١٢ + ث١ أي أن ث١ = ٦

وتكون العلاقة بين السرعة والزمن هي : ع = ٣ن٢ - ٤ن + ٦

ونعلم أن السرعة ع = $\frac{دف}{دن}$ إذن ف = ∫ ع د ن

ف = ∫ (٣ن² − ٤ن + ٦) ء ن = ن³ − ٢ن² + ٦ن + ث₂

بما أن ف = صفراً عندما ن = صفراً لذا فإنّ ث₂ = صفراً.

إذن: ف = ن³ − ٢ن² + ٦ن.

مثال (٦–٣٤)

تتدحرج كرة على مستوٍ بسرعة ابتدائية ٨م/ ثانية. وإذا كانت السرعة تتناقص بسبب الاحتكاك بمعدل ٢م/ ثانية في الثانية فما هي إزاحة الكرة حتى وقوفها؟

الحل :

بما أن $\frac{ءع}{ءن}$ = −٢ إذن: ع = ∫ −٢ ءن = −٢ن + ث₁.

وحيث إن ع = ٨ عندما ن = صفراً.

إذن ٨ = صفراً + ث₁ ⟸ ث₁ = ٨ فتصبح السرعة ع = −٢ن + ٨.

وبالتالي ف = ∫ ع ء ن = ∫ (−٢ن + ٨) ء ن = −ن² + ٨ن + ث₂

وحيث إن ف = صفراً عندما ن = صفراً، إذن ث₂ = صفراً

وبالتالي فإن ف = −ن² + ٨ن.

والآن لاحظ أنه عندما ن = ٤ تكون ع = صفراً، أي أن الكرة تتدحرج مدة أربع ثوانٍ قبل أن تقف.

وعندما ن = ٤ تكون ف = −١٦ + ٣٢ = ١٦م.

تمارين (٦ – ٣)

(١) أوجد معادلة مجموعة المنحنيات التي ميلها م المعطى ثم أوجد معادلة المنحني من هذه المجموعة الذي يمر بالنقطة المعطاة في كل مما يلي:

(أ) م = ٤س ، (١ ، ٥).　　(ب) م = $(س - ١)^{٢}$ ، (٣ ، صفر).

(ج) م = $\sqrt{س}$ ، (٩ ، ١٨).　　(د) م = $\frac{١}{س^{٢}}$ ، (١ ، ٢).

(٢) أوجد معادلة المنحني الذي يمر بالنقطة (٩ ، ٣) وميل مماسه عند كل نقطة هو $\frac{دص}{دس} = -\,١\,س$.

(٣) إذا كان ميل المنحني ص = د(س) عند أي نقطة (س ، ص) واقعة عليه يساوي س(٢س − ١) فأوجد معادلة المنحني إذا علم أنه يمر بالنقطة (١ ، −٣).

(٤) إذا كان ميل منحنٍ عند أي نقطة (س ، ص) عليه هو $\frac{دص}{دس} = ٣س^{٢} + ٢س - ٥$ فأوجد معادلة المنحني علماً بأنه يمر بالنقطة (−١ ، ٥).

(٥) أوجد معادلة مجموعة المنحنيات التي ميلها عند أي نقطة يساوي مثلي الإحداثي السيني للنقطة بإشارة مخالفة. ثم أوجد ذلك المنحني من المجموعة الذي يمر بالنقطة (١ ، ١).

(٦) إذا كان $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = ٢$ لمنحنٍ مفروض فأوجد معادلته إذا كان هذا المنحني يمر بالنقطة (٢ ، ٦) وميله عندها يساوي ١٢.

(٧) يتحرك جسيم على خط مستقيم مبتدئاً من نقطة الأصل عند اللحظة ن = صفراً بسرعة ع = $٣ن^{٢} + ٢ن$ أوجد إزاحة الجسيم خلال الفترة من ن = ٢ إلى ن = ٤.

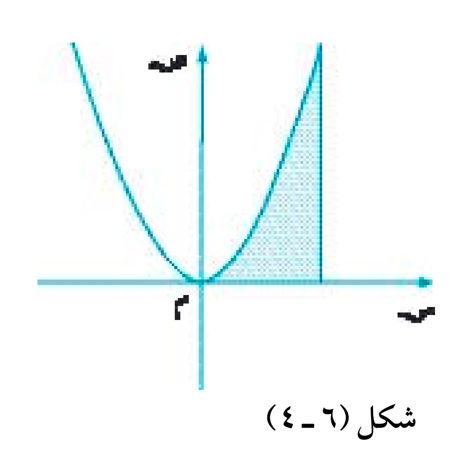
(٨) يتحرك جسيم في خط مستقيم بتسارع ت = ٦ن – ٦ . حيث ن هو الزمن بالثواني أوجد العلاقة بين السرعة والزمن والعلاقة بين الإزاحة والزمن علماً بأن سرعته ٣٠م/ ثانية بعد مضي ٤ ثوان من بدء الحركة (التي بدأت باللحظة ن = صفراً) وأن إزاحة الجسيم خلال هذه الفترة ٦٠م.

(٩) يتحرك جسيم في خط مستقيم، فإذا كانت حركة الجسيم تتعين من القانون ت = ٣ (٤ن – ١) حيث ت هي التسارع، ن هو الزمن بالثواني، فأوجد بدلالة الزمن كلاً من السرعة والإزاحة علماً بأن الجسيم بدأ حركته من نقطة الأصل بسرعة ٨م/ ثانية في اللحظة ن = صفراً.

٦ – ٥ التكامل المحدَّد

في هذا البند سنتكلم عما يسمى (تكامل دالة على فترة حقيقية) وسوف ترى أن عملية التكامل هذه ما هي إلا عملية جمع ذات طابع خاص تتمثل في جمع عدد غير منتهٍ من العناصر الصغيرة جداً، وحينما يكون هذا المجموع ناتج محدَّد ووحيد، فسوف نقول إن الدالة المعطاة قابلة للتكامل على الفترة المعطاة. وقد نشأ موضوع التكامل كغيره من الموضوعات الرياضية المهمة لحل مجموعة من المشكلات ومن أهم المشكلات التي ساعدت على ظهور فكرة التكامل المحدد مشكلة إيجاد مساحة منطقة مستوية مثل المنطقة المظللة في الشكل (٦ – ٤).

وسيكون موضوع الدراسة هنا وفق الشروط الآتية:



شكل (٦ ـ ٤)

(١) أن تكون الدالة د(س) حقيقية.

(٢) أن تكون الفترة التي نكامل عليها الدالة مغلقة [أ ، ب].

(٣) أن تكون الدالة معرَّفة ومحدودة على هذه الفترة (أي أنها محدودة من أعلى ومحدودة من

أسفل ، كما تعلم - راجع التعريف (٣-٩) .

وسوف نستعين ببعض المفاهيم والمصطلحات الآتية :

(أولاً) تجزيء الفترة المغلقة [أ ، ب] :

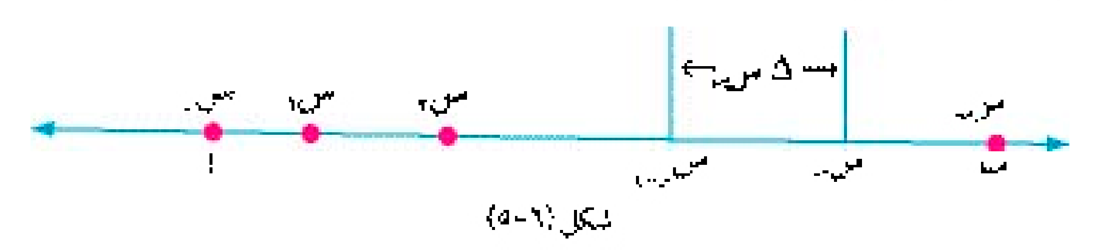
إذا كانت لديك فترة مغلقة [أ ، ب] فإن تجزيء هذه الفترة يعني تقسيمها إلى عدد قدره ن من الفترات الجزئية ويتم ذلك بواسطة تحديد مجموعة من النقاط التي تسمى نقط التجزيء وعددها ن + ١ وهي :

$$\text{أ} = \text{س}_{٠} ، \text{س}_{١} ، \text{س}_{٢} ، \ldots ، \text{س}_{ر-١} ، \text{س}_{ر} ، \ldots ، \text{س}_{ن} = \text{ب}$$

حيث $٠ \leq \text{ر} \leq \text{ن} ، \text{ر} \in \text{ط}$

بحيث يكون :

$$\text{س}_{٠} < \text{س}_{١} < \text{س}_{٢} < \ldots < \text{س}_{ر-١} < \ldots < \text{س}_{ن}$$



شكل (٦-٥)

ويسمى التجزيء الناتج (التجزيء النوني) للفترة [أ ، ب] ونرمز له بالرمز تن (أ ، ب) ويكتب :

$$\text{تن}(\text{أ} ، \text{ب}) = \{\text{س}_{٠} ، \text{س}_{١} ، \text{س}_{٢} ، \ldots ، \text{س}_{ن}\}$$

وهكذا تنقسم الفترة [أ ، ب] إلى ن من الفترات الجزئية وهي :

الفترة الجزئية الأولى = $[س_0 ، س_1]$.

الفترة الجزئية الثانية = $[س_1 ، س_2]$.

الفترة الجزئية الثالثة = $[س_2 ، س_3]$.

الفترة الجزئية الرائية = $[س_{ر-1} ، س_ر]$. أي أن :

$$\Delta س_ر = س_ر - س_{ر-1}$$

وإذا كانت المسافات بين نقط التجزيء متساوية سمي التجزيء الناتج «التجزيء المنتظم النوني للفترة $[أ ، ب]$» فإذا كانت Δس تعبر عن طول أي فترة جزئية فإن :

$$\Delta س = \frac{ب - أ}{ن} \qquad (٦-١٨)$$

وتكون نقط التجزيء المنتظم النوني للفترة $[أ ، ب]$ هي :

$س_0 = أ ، س_1 = أ + \Delta س ، س_2 = أ + ٢\Delta س ، \ldots ، س_م = أ + م \times \Delta س$

حيث $٠ \le م \le ن$.

مثال (٦-٣٥)

أوجد التجزيء المنتظم النوني للفترة $[٢ ، ٦]$ ثم أوجد $ت_1$ (٢ ، ٦) ، $ت_ر$ (٢ ، ٦) ، وأوجد أيضاً الفترات الجزئية في حالة ن = ٦ .

الحـــل :

$$طول كل فترة = \Delta س = \frac{ب - أ}{ن}$$

$$= \frac{٦ - ٢}{ن} = \frac{٤}{ن}$$

إذن $ت_ن(٢ ، ٦) = (٢ ، ٢ + \frac{٤}{ن} ، ٢ + ٢ \times \frac{٤}{ن} ، \ldots ، ٢ + ر \times \frac{٤}{ن} ، \ldots ، ٦)$ (٦-١٩)

بوضع ن = ٦ في (٦-١٩) نحصل على:

$ت_٦(٢ ، ٦) = (٢ ، ٢\frac{٢}{٣} ، ٣\frac{١}{٣} ، ٤ ، ٤\frac{٢}{٣} ، ٥\frac{١}{٣} ، ٦)$

الفترات الجزئية في هذه الحالة هي:

$[س_٠ ، س_١] = [٢ ، ٢\frac{٢}{٣}]$ ، $[س_١ ، س_٢] = [٢\frac{٢}{٣} ، ٣\frac{١}{٣}]$ ، $[س_٢ ، س_٣] = [٣\frac{١}{٣} ، ٤]$،

$[س_٣ ، س_٤] = [٤ ، ٤\frac{٢}{٣}]$ ، $[س_٤ ، س_٥] = [٤\frac{٢}{٣} ، ٥\frac{١}{٣}]$ ، $[س_٥ ، س_٦] = [٥\frac{١}{٣} ، ٦]$.

وبوضع ن = ٨ في (٦-١٩) نحصل على:

$ت_٨(٢ ، ٦) = (٢ ، ٢\frac{١}{٢} ، ٣ ، ٣\frac{١}{٢} ، ٤ ، ٤\frac{١}{٢} ، ٥ ، ٥\frac{١}{٢} ، ٦)$.

(ثانياً) مجموع ريمان

تعريف (٦-٢):

لتكن د دالة معرفة ومحدودة في [أ ، ب] يعرف مجموع ريمان للدالة د المناظر للتجزيء $ت_ن[أ ، ب]$ بأنه المجموع:

$$\sum_{ر=١}^{ن} د(ح_ر)\, \Delta س_ر \qquad (٦-١٩)$$

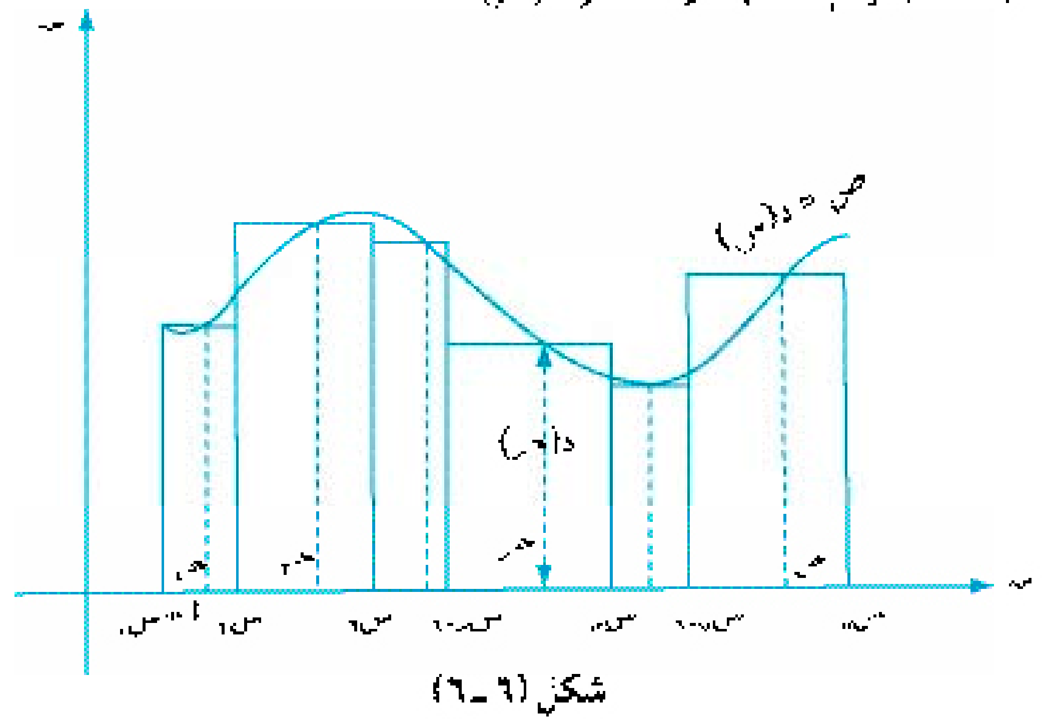
حيث $\Delta س_ر = س_ر - س_{ر-١}$ ، $ح_ر$ عدد اختياري من الفترة $[س_{ر-١} ، س_ر]$.

ملحوظات (٦ – ٤):

(١) من التعريف (٦-٢) يتضح أن مجموع ريمان يعتمد على طريقة التجزيء للفترة [أ ، ب] أي

أنه يعتمد على عدد الفترات الجزئية التي قسمنا إليها [أ ، ب] وعلى أطوال هذه الفترات كما أنه يعتمد أيضاً على طريقة اختيارنا القيم $حـ_ر$.

(٢) مساحة المنطقة المضلعة الظاهرة في الشكل (٦-٦) تمثل مجموع ريمان . $\sum_{ر=1}^{ن} د(حـ_ر) \Delta س_ر$
ونحصل على المساحة كالتالي: على كل فترة جزئية : $[س_{ر-1} ، س_ر]$ من فترات التجزيء ت، [أ ، ب] نرسم مستطيلاً ارتفاعه هو $د(حـ_ر)$.



شكل (٦ ـ ٦)

وعليه تكون:

مساحة المنطقة المضلعة = مجموع مساحات المستطيلات

$$= د(حـ_1) \cdot \Delta س_1 + د(حـ_2) \cdot \Delta س_2 + \dots + د(حـ_ن) \Delta س_ن$$

$$= \sum_{ر=1}^{ن} د(حـ_ر) \Delta س_ر$$

مثال (٦-٣٦)

إذا كانت $د(س) = 4 - س^2$ فأوجد مجموع ريمان للدالة د على الفترة $[-1 ، 2]$ حيث $ن(-1 ، 2) = \{-1 ، 0 ، \frac{1}{2} ، \frac{5}{4} ، 2\}$ ، $ح_1 = -\frac{3}{4}$ ، $ح_2 = \frac{1}{4}$ ، $ح_3 = \frac{5}{4}$ ، $ح_4 = \frac{5}{4}$.

الحـــل :

الفترات الجزئية هي:

$$[-1 ، 0] ، [0 ، \frac{1}{2}] ، [\frac{1}{2} ، \frac{5}{4}] ، [\frac{5}{4} ، 2]$$

وأطوالها هي:

$$\Delta س_1 = 0 - (-1) = 1 ، \Delta س_2 = \frac{1}{2} ، \Delta س_3 = \frac{3}{4} ، \Delta س_4 = \frac{3}{4}$$

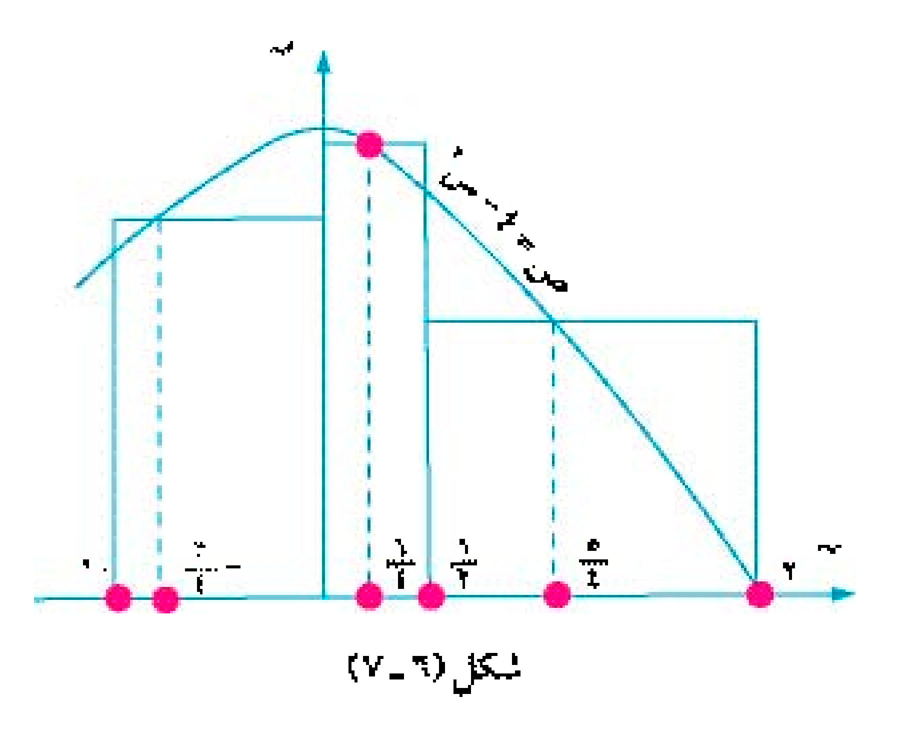
على الترتيب

$$د(ح_1) = د(-\frac{3}{4}) = 4 - (-\frac{3}{4})^2 = \frac{55}{16} ،$$

$$د(ح_2) = د(\frac{1}{4}) = \frac{63}{16} ،$$

$$د(ح_3) = د(\frac{5}{4}) = \frac{39}{16} ،$$

$$د(ح_4) = د(\frac{5}{4}) = \frac{39}{16}$$



شكل (٦ ـ ٧)

فيكون مجموع ريمان هو:

$$\sum_{ر=1}^{4} د(ح_ر)\,\Delta س_ر = د(ح_1)\,\Delta س_1 + د(ح_2)\,\Delta س_2 + د(ح_3)\,\Delta س_3 + د(ح_4)\,\Delta س_4$$

$$= \frac{٥٥}{١٦} \times ١ + \frac{٦٣}{١٦} \times \frac{١}{٢} + \frac{٣٩}{١٦} \times \frac{٣}{٤} + \frac{٣٩}{١٦} \times \frac{٣}{٤} = \frac{١٤٥}{١٦}$$

أي أن مساحة المنطقة المظلمة في الشكل (٦ ـ ٧) تساوي $\frac{١٤٥}{١٦}$ وحدة مربعة .

(ثالثاً) بعض قوانين المجموع

إن الرمز ($\sum$) الذي تستخدمه للدلالة على مجموع ريمان ليس بالجديد عليك ، ونذكّرك فيما يأتي بخصائص هذا الرمز التي تعلمتها في الصف الثاني الثانوي .

(١) $\sum_{ر=1}^{ن} ك = ك\,ن$ (٦ ـ ٢٠)

(٢) $\sum_{ر=1}^{ن} ر = \frac{ن(ن+1)}{2}$ (٦ ـ ٢١)

(٣) $\sum_{ر=1}^{ن} ك\, س_ر = ك \sum_{ر=1}^{ن} س_ر$ حيث ك عدد حقيقي ثابت . (٦-٢٢)

(٤) $\sum_{ر=1}^{ن} (ر - 1) = \frac{ن(ن - 1)}{2}$ (٦-٢٣)

(٥) $\sum_{ر=1}^{ن} ر^2 = \frac{ن}{6}(ن + 1)(2ن + 1)$ (٦-٢٤)

(٦) $\sum_{ر=1}^{ن} ر^3 = \left[\frac{ن(ن + 1)}{2}\right]^2 = \frac{ن^2(ن + 1)^2}{4}$. (٦-٢٥)

(٧) $\sum_{ر=1}^{ن} (س_ر \pm ص_ر) = \sum_{ر=1}^{ن} س_ر \pm \sum_{ر=1}^{ن} ص_ر$. (٦-٢٦)

(٨) $\sum_{ر=1}^{ن} ك\, س_ر = ك \sum_{ر=1}^{ن} س_ر$ حيث ك عدد حقيقي ثابت . (٦-٢٧)

والآن نثبت إحدى الفقرات السابقة بالاستقراء الرياضي ولتكن الفقرة (٦-٢١)

$$\sum_{ر=1}^{ن} ر = \frac{ن(ن + 1)}{2}$$

(١) في حالة ن = ١ :

الطرف الأيمن = ١ .

الطرف الأيسر = $\frac{1 \times (1 + 1)}{2} = 1$

إذن الطرفان متساويان

(٢) نفرض صحة العلاقة في حالة ن = ك أي أن :

$1 + 2 + 3 + \ldots + ك = \frac{ك(ك + 1)}{2}$ ... (٦-٢٨)

(٣) نحاول إثبات صحة العلاقة في حالة ن = ك + ١ أي نثبت أن:

$$١ + ٢ + ٣ + \ldots + ك + (ك + ١) = \frac{(ك + ١)\{(ك + ١) + ١\}}{٢}$$

بإضافة (ك + ١) لطرفي العلاقة (٦–٢٨) نحصل على:

$$١ + ٢ + ٣ + \ldots + ك + (ك + ١) = \frac{ك(ك + ١)}{٢} + (ك + ١)$$

$$= \frac{(ك + ١)(ك + ٢)}{٢}$$

$$= \frac{(ك + ١)\{(ك + ١) + ١\}}{٢}$$

وهو المطلوب.

التكامل على فترة

سنقدم فيما يلي معنى تكامل الدالة د على الفترة [أ ، ب]:

تعريف (٦–٣)

لتكن الدالة د معرفة ومحدودة على [أ ، ب] إذا كانت النهاية $\lim_{\|ح\| \to ٠} \sum_{ر=١}^{ن} د(حـ_ر)\, \Delta س_ر$ موجودة دائماً وتساوي عدداً حقيقياً وحيداً ت ∀ ح مهما كانت طريقة تكوين مجموع ريمان $\sum_{ر=١}^{ن} د(حـ_ر)\, \Delta س_ر$ فإن العدد ت يسمى التكامل المحدد للدالة د على الفترة [أ ، ب] ويرمز له بالرمز $\int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس$ ويقال في هذه الحالة إن د قابلة للتكامل على [أ ، ب].

ملحوظات (٦ – ٥) :

أولاً : من التعريف (٦ – ٣) يتضح أنه إذا كانت د قابلة للتكامل على [أ ، ب] فإن التكامل

$\int_{أ}^{ب}$ د(س) ءس الذي يقرأ التكامل د من أ إلى ب، هو عدد حقيقي يعتمد على أمرين فقط هما :

١ – قيمتا العددين أ ، ب (ويسمى العددان أ ، ب حدي التكامل).

٢ – قاعدة تعريف الدالة د .

أما رمز المتغير س فيمكن أن نستبدل به أي رمز آخر، فيكون :

$$\int_{أ}^{ب} د(س)\,ءس = \int_{أ}^{ب} د(ص)\,ءص = \int_{أ}^{ب} د(ع)\,ءع$$

أي أنّ قيمة التكامل مستقلة عن الرمز الذي يستخدم للتعبير عن متغير الدالة .

ثانياً : إذا كانت الدالة د قابلة للتكامل على الفترة [أ ، ب] فإن قيمة التكامل لا تعتمد على طريقة اختيارنا للقيم حر في الفترة Δس ر. ويمكننا اختيار أي قيمة نريد حر في الفترة Δس ر لنحصل على القيمة نفسها للتكامل .

ثالثاً : من الواضح أن إثبات كون دالة ما قابلة للتكامل ليس بالأمر اليسير في كثير من الحالات ، ولن نهتم كثيراً هنا بطرق اختبار ما إذا كانت دالة ما قابلة أو غير قابلة للتكامل على فترة ما . وإنّما سنكتفي بتناول دوال نعرف مقدماً أنها قابلة للتكامل ، وسيكون اهتمامنا منصباً بصفة عامة على حساب تكاملات هذه الدوال بل إننا سنكتفي بتناول الدوال المتصلة معتمدين على النظرية الآتية التي نذكرها دون تقديم برهان لها .

نظرية (٦-٤)

إذا كانت الدالة د متصلة على فترة مغلقة فإنها تكون قابلة للتكامل على هذه الفترة .

الأمثلة التالية توضح كيفية حساب بعض التكاملات باستخدام التعريف (٦-٣) واعتماداً على النظرية (٦-٤) .

مثال (٦-٣٧)

أثبت أن الدالة د(س) = س لكل س ∈ ح قابلة للتكامل على [أ ، ب] واحسب قيمة هذا التكامل .

الحـــل :

الدالة المعطاة متصلة عند جميع قيم س لأنها دالة كثيرة حدود وبالتالي فهي متصلة في الفترة [أ ، ب] وينتج من النظرية (٦-٤) أنها قابلة للتكامل على هذه الفترة . وبناءً على ذلك فإن أي طريقة نختار بها النقط حـر توصلنا إلى قيمة وحيدة للنهاية :

$$\text{نها} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{د(حـ}_\text{ر}\text{)}\ \Delta \text{س}_\text{ر}$$ المعطاة في التعريف (٦-٣)

نجزئ الفترة [أ ، ب] تجزيئاً منتظماً حسبما رأينا في التعريف (٦-٢) فيكون طول كل فترة جزئية هو :

Δس حيث $\Delta \text{س} = \dfrac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}}$

وتكون نقط التجزيء هي :

$\text{س}_\text{ر} = \text{أ} + \text{ر} \times \Delta \text{س}$

$$= أ + ر \times \frac{ب - أ}{ن} \quad \text{حيث} \quad ١ \le ر \le ن$$

وللسهولة نختار النقطة $ج_ر \in [س_{ر-١}، س_ر]$ حيث يكون $ج_ر = س_ر$

ومع ملاحظة أن $د(س) = س$ لكل $س \in [أ، ب]$ فإن:

$$د(ج_ر) = د(س_ر) = س_ر$$

$$= أ + ر \times \frac{ب - أ}{ن}$$

إذن: $\sum_{ر=١}^{ن} د(ج_ر)\, \Delta س_ر = \sum_{ر=١}^{ن} د(ج_ر) \times \frac{ب - أ}{ن}$

$$= \frac{ب - أ}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} د(ج_ر)$$

$$= \frac{ب - أ}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} \left(أ + ر \times \frac{ب - أ}{ن}\right)$$

$$= \frac{ب - أ}{ن} \left[\sum_{ر=١}^{ن} أ + \frac{ب - أ}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} ر\right]$$

$$= \frac{ب - أ}{ن} \left[ن أ + \frac{ب - أ}{ن} \times \frac{ن(ن + ١)}{٢}\right]$$

$$= أ(ب - أ) + \frac{ن + ١}{٢ن} \times (ب - أ)^٢$$

وباستخدام التعريف (٦-٣) نجد أن:

$$\int_{أ}^{ب} د(س)\, ء س = \lim_{ن \to \infty} \sum_{ر=١}^{ن} د(ج_ر)\, \Delta س_ر$$

$$= \lim_{ن \to \infty} \left[أ(ب - أ) + \frac{(ن + ١)}{٢ن} \times (ب - أ)^٢\right]$$

$$= (ب - أ) + (ب - أ)^2 \lim_{ن \to \infty} \frac{ن + ١}{٢ن}$$

$$= (ب - أ) + (ب - أ)^2 \times \frac{١}{٢}$$

$$= \frac{ب^2 - أ^2}{٢}$$

أي أن $\int_{أ}^{ب} د(س)\, ء س = \frac{ب^2 - أ^2}{٢}$

مثال (٦–٣٨)

أثبت أن الدالة د(س) = ك ، حيث ك عدد حقيقي ثابت قابلة للتكامل على الفترة [أ ، ب] ثم احسب قيمة التكامل $\int_{أ}^{ب} د(س)\, ء س$.

الحــل :

الدالة د متصلة في الفترة [أ ، ب] لأنها دالة ثابتة وبالتالي فهي قابلة للتكامل على الفترة .

كما في المثال (٦–٣٧) تجزئ الفترة [أ ، ب] تجزيئاً منتظماً فيكون طول أي فترة جزئية هو $\Delta س$ حيث $\Delta س = \frac{ب - أ}{ن}$ ، ومع ملاحظة أن د(س) = ك لكل س ∈ [أ ، ب] فإن :

$$\sum_{ر=١}^{ن} د(هـ_ر)\, \Delta س_ر = \frac{ب - أ}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} ك$$

$$= \frac{ب - أ}{ن} \times ك\, ن$$

$$= ك\, (ب - أ)$$

ومن التعريف (٦–٢) يكون :

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{دس} = \lim_{\text{ن}\to\infty} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{د}(\text{ح}_{\text{ر}})\,\Delta \text{س}_{\text{ر}}$$

$$= \lim_{\text{ن}\to\infty} \text{ك}(\text{ب} - \text{أ})$$

$$= \text{ك}(\text{ب} - \text{أ})$$

مثال (٦-٣٩)

أثبت أن الدالة د(س) = س^2 قابلة للتكامل على [أ ، ب] وأوجد قيمة هذا التكامل.

الحــل :

الدالــة د(س) = س^2 متصلة في الفترة [أ ، ب] لأنها دالة كثيرة حدود وبالتالي فهي قابلة للتكامل على هذه الفترة كما في المثال (٦-٣٨)، نجزئ الفترة [أ ، ب] تجزيئاً منتظماً فيكون :

طول أي فترة جزئية = $\Delta \text{س} = \dfrac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}}$

نختار $\text{ح}_{\text{ر}} = \text{س}_{\text{ر}} = \text{أ} + \text{ر}\,\Delta\text{س}$

$$= \text{أ} + \text{ر} \times \frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}}$$

وبملاحظة أنّ د(س) = س^2 لكل س ∈ [أ ، ب] فإن:

$$\text{د}(\text{ح}_{\text{ر}}) = \text{د}(\text{س}_{\text{ر}}) = \text{س}_{\text{ر}}^2$$

$$= \left(\text{أ} + \text{ر} \times \frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}}\right)^2$$

$$= \text{أ}^2 + \frac{2\text{أ}(\text{ب} - \text{أ})}{\text{ن}} \times \text{ر} + \frac{(\text{ب} - \text{أ})^2}{\text{ن}^2} \times \text{ر}^2$$

إذن:

$$\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{د}(\text{ح}_{\text{ر}})\,\Delta\text{س} = \frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}} \left[\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{أ}^2 + \frac{2\text{أ}(\text{ب} - \text{أ})}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ر} + \frac{(\text{ب} - \text{أ})^2}{\text{ن}^2} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ر}^2 \right]$$

$$= \frac{ب - أ}{ن} \left[ن أ^2 + \frac{2أ(ب - أ)}{ن} \times \frac{ن(ن + 1)}{2} + \frac{(ب - أ)^2}{ن^2} \times \frac{ن(ن + 1)(2ن + 1)}{6} \right]$$

$$= أ^2(ب - أ) + أ(ب - أ)^2 \times \frac{ن + 1}{ن} + (ب - أ)^3 \times \frac{2ن^2 + 3ن + 1}{6ن^2}$$

ومن التعريف (6−3) نجد أن :

$$\int_{أ}^{ب} س^2 \, دس = \lim_{ن \to \infty} \sum_{ر=1}^{ن} د(س_ر) \, \Delta س$$

$$= أ^2(ب - أ) + أ(ب - أ)^2 + \frac{1}{3}(ب - أ)^3$$

$$= \frac{1}{3}(ب - أ)\left[3أ^2 + 3أب - 3أ^2 + ب^2 - 2أب + أ^2\right]$$

$$= \frac{1}{3}(ب - أ)(ب^2 + أب + أ^2)$$

$$= \frac{1}{3}(ب^3 - أ^3)$$

أي أن $\int_{أ}^{ب} س^2 \, دس = \frac{ب^3 - أ^3}{3}$

نتيجة (6 − 3)

النتائج التالية لصور بعض التكاملات المحددة التي أثبتناها في الأمثلة السابقة يمكن استخدامها مباشرة في حل المسائل :

(1) $\int_{أ}^{ب} ك \, دس = ك(ب - أ)$ ، ك عدد حقيقي ثابت (6−29)

(2) $\int_{أ}^{ب} س \, دس = \frac{ب^2 - أ^2}{2}$ (6−30)

(3) $\int_{أ}^{ب} س^2 \, دس = \frac{ب^3 - أ^3}{3}$ (6−31)

فمثلاً : $\int_{2}^{4} 3 \, دس = 3(4 - 2) = 6$ من (6−29)

$\int_{-4}^{-1} -12 \, دس = -12 \{-1 - (-4)\} = -36$; من (٦–٢٩)

$\int_{1}^{3} س \, دس = \frac{3^2 - 1^2}{2} = 4$ من (٦–٣٠)

$\int_{-3}^{1} س^2 \, دس = \frac{1^3 - (-3)^3}{3} = \frac{1 + 27}{3} = 9\frac{1}{3}$ من (٦–٣١)

تدريب (٦–١٠)

استخدم النتيجة (٦–٣) في إيجاد قيمة :

(١) $\int_{-2}^{3} س \, دس$ (٢) $\int_{2}^{4} س^2 \, دس$

التفسير الهندسي للتكامل المحدَّد

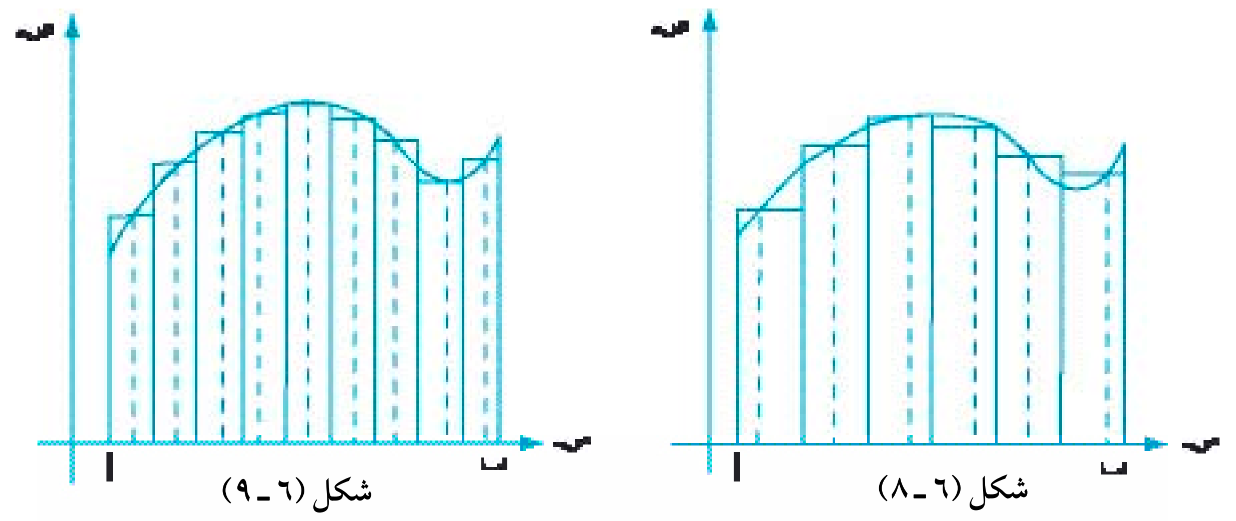
نعلم أن مشتقة الدالة د(س) عند نقطة ما هي إلا ميل المماس للدالة عند هذه النقطة ، وهذا الارتباط بين المفهوم التحليلي والهندسي هو نقطة الارتكاز التي اعتمدنا عليها في تطبيقات التفاضل التي مرّت بنا .

فما هو التفسير الهندسي للتكامل المحدد $\int_{أ}^{ب}$ د(س) دس ؟

لتوضيح ذلك سنفترض هنا أن الدالة د متصلة في [أ ، ب] وأنّ د(س) ≥ ٠ لكل س ∈ [أ ، ب] ولنفرض أن ت ن هو التجزيء النوني المنتظم للفترة [أ ، ب] فيكون مجموع ريمان :

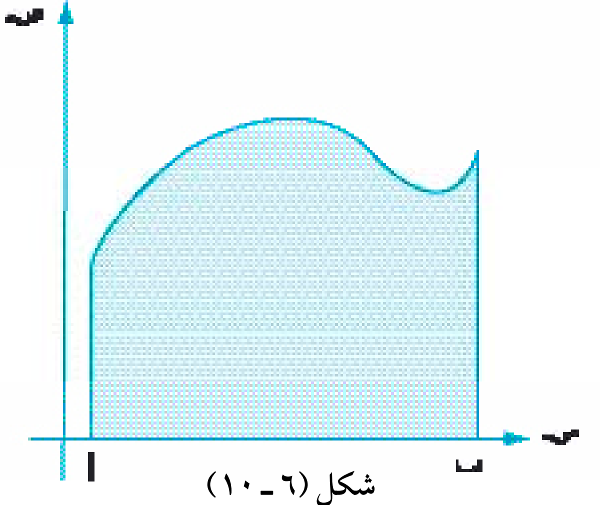
$\sum_{ر=1}^{ن}$ د(جـ ر) ∆س ر هو مساحة المنطقة المظللة في الشكل (٦–٨).

ومن الواضح أنه كلما زاد عدد الفترات الجزئية ن ، وصغر كل من الأطوال ∆س ر كثر عدد المستطيلات المتلاصقة وصغر طول قاعدة كل منها كما في الشكل (٦–٩)



شكل (٦ ـ ٨)　　　　　شكل (٦ ـ ٩)

وفي النهاية نستطيع أن نتصور أنه حين ن ← ∞ فإن مجموع ريمان $\sum_{ر=1}^{ن} د(حـ_ر) \Delta س_ر$ يقترب من مساحة المنطقة المظللة في الشكل (٦ ـ ١٠) وهي المحصورة بين منحنى الدالة د ومحور السينات والخطين المستقيمين س = أ، س = ب أي أنه إذا كانت الدالة د متصلة في [أ، ب] وكانت غير سالبة في هذه الفترة فإن $\int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس$ يعبّر عن مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين منحنى الدالة د ومحور السينات والخطين المستقيمين س = أ، س = ب الموازيين لمحور الصادات.



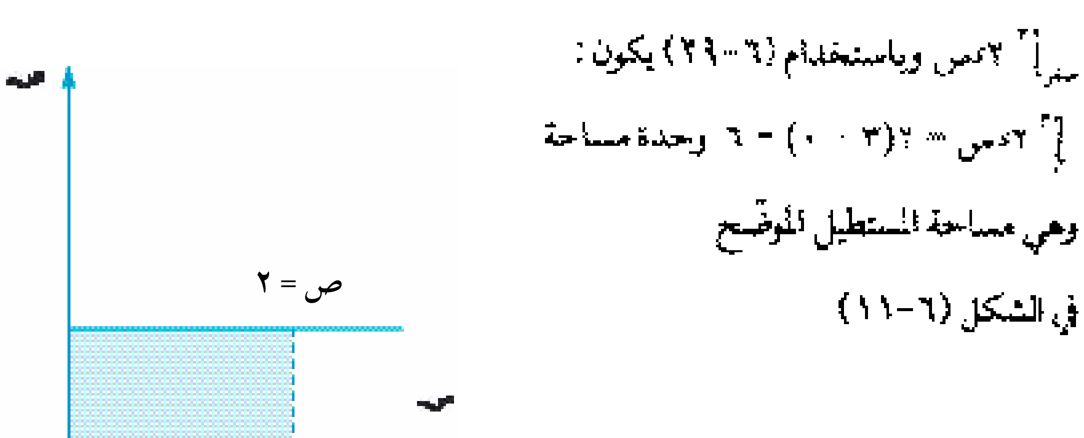
شكل (٦ ـ ١٠)

وعلى سبيل المثال المساحة الواقعة بين منحنى الدالة ص = ٢ ومحور السينات والمستقيمين س = صفراً، س = ٣ هي:

$\int_{\text{صفر}}^{٣} ٢\,\text{دس}$ وباستخدام (٦ - ٢٩) يكون:

$\int_{\text{صفر}}^{٣} ٢\,\text{دس} = ٢(٣ - ٠) = ٦$ وحدة مساحة

وهي مساحة المستطيل الموضح في الشكل (٦-١١)



شكل (٦ ـ ١١)

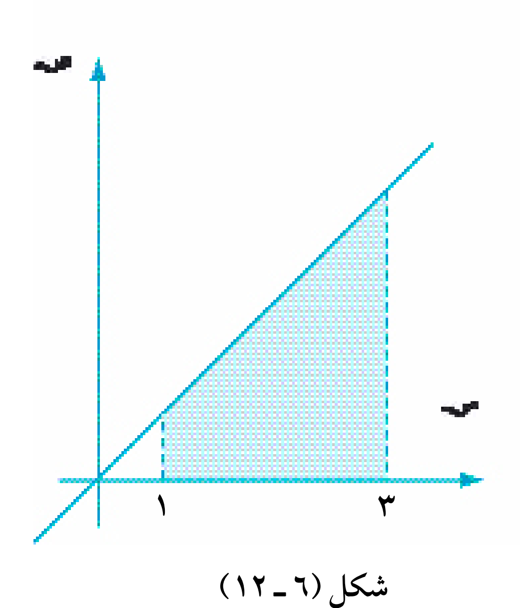
وأيضاً المساحة الواقعة بين منحنى الدالة ص = س،

ومحور السينات والمستقيمين س = ١، س = ٣

هي $\int_{١}^{٣} \text{س}\,\text{دس}$ وباستخدام (٦ - ٣٠) يكون:

$\int_{١}^{٣} \text{س}\,\text{دس} = \frac{٣^{٢} - ١^{٢}}{٢} = ٤$ وحدة مساحة

وهي تمثل مساحة شبه المنحرف في الشكل (٦-١٢)



شكل (٦ ـ ١٢)

ملحوظة (٦ – ٦) :

إذا كانت الدالة د قابلة للتكامل على [أ ، ب] فإن :

(١) $\int_{ب}^{أ} د(س)\,ءس = -\int_{أ}^{ب} د(س)\,ءس$ (٦–٣٢)

(٢) $\int_{أ}^{أ} د(س)\,ءس =$ صفراً. (٦–٣٣)

فمثلاً :

$$\int_{٢}^{٥} س\,ءس = \frac{٥^{٢} - ٢^{٢}}{٢} = \frac{٢١}{٢}$$

$$\int_{-٢}^{٣} س^{٢}\,ءس = \frac{٣^{٣} - (-٢)^{٣}}{٣} = \frac{٣٥}{٣}$$

وتبعاً للملحوظة السابقة ينتج أن :

$$\int_{٥}^{٢} س\,ءس = -\frac{٢١}{٢}$$

$$\int_{٣}^{-٢} س^{٢}\,ءس = -\frac{٣٥}{٣}$$

وكذلك فإن :

$\int_{١٢}^{١٢} س^{٢}\,ءس =$ صفراً.

$\int_{-٣}^{-٣} س^{٢}\,ءس =$ صفراً.

$\int_{٤}^{٤} س^{٣}\,ءس =$ صفراً.

تمارين (٦ – ٤)

– في كل من التمارين الآتية أوجد مجموع ريمان مستخدماً التجزيء المعطى والنقط حـر المعطاة ثم وضّح على الرسم المساحات التي يمثّلها .

(١) د(س) = $س^{٢}$ حيث س ∈ [٠ ، ٣]

$ت_{١}$ [٠ ، ٣] = {٠ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٥}{٤}$ ، $\frac{٩}{٤}$ ، ٣}

$ح_{١}$ = $\frac{١}{٤}$ ، $ح_{٢}$ = ١ ، $ح_{٣}$ = $١\frac{١}{٢}$ ، $ح_{٤}$ = $٢\frac{١}{٢}$.

(٢) د(س) = $س^{٢}$ + ٣ س حيث س ∈ [٠ ، ٣]

$ت_{١}$ [٠ ، ٣] = {٠ ، ١ ، $١\frac{١}{٢}$ ، $٢\frac{١}{٢}$ ، ٣}

(أ) عندما $ح_{١}$ = ١ ، $ح_{٢}$ = $١\frac{١}{٢}$ ، $ح_{٣}$ = ٢ ، $ح_{٤}$ = $٢\frac{٣}{٤}$

(ب) عندما تكون حـر هي منتصفات الفترات الجزئية الناتجة .

– لكل من الدوال الآتية ، ابحث قابلية التكامل على الفترة المبينة أمام كل منها وإذا كانت الدالة قابلة للتكامل فأوجد قيمة هذا التكامل :

(١) د(س) = ٨ على [–٢ ، ٣] .

(٢) د(س) = –٦ على [٢ ، ٥] .

(٣) د(س) = س على [٢ ، ٤] .

(٤) د(س) = ٣ – س على [–٢ ، ٥] .

(٥) د(س) = ٢س + ٥ على [–١ ، ٣] .

(٦) د(س) = س^٢ على [−٣ ، ٠].

(٧) د(س) = √(٤ − س^٢) على [−٤ ، −٢].

– في كل من التمرينين الآتيين أوجد أولاً تكامل الدالة على الفترة المعطاة ثم احسب هندسياً المساحة الواقعة تحت منحنى الدالة وفوق الفترة المعطاة (تحقق من تساوي النتيجتين):

(١) د(س) = ٢س على [٢ ، ٥].

(٢) د(س) = س+٣ على [−٢ ، ٤].

(٦ – ٦) بعض خواص التكامل المحدَّد

(١) إذا كانت ك ∈ ح ، وكانت الدالة د قابلة للتكامل على [أ ، ب] فإن :

$$\int_{أ}^{ب} ك\,د(س)\,ءس = ك \int_{أ}^{ب} د(س)\,ءس \,. \qquad (٦-٣٤)$$

(٢) إذا كانت الدالتان $د_1$ ، $د_2$ قابلتين للتكامل على [أ ، ب] فإن الدالة $د_1 \pm د_2$ تكون قابلة للتكامل على [أ ، ب] ويكون :

$$\int_{أ}^{ب} (د_1 \pm د_2)(س)\,ءس = \int_{أ}^{ب} د_1(س)\,ءس \pm \int_{أ}^{ب} د_2(س)\,ءس \,. \qquad (٦-٣٥)$$

(٣) إذا كانت الدالة د قابلة للتكامل على [أ ، ب] ، جـ ∈ [أ ، ب] فإن :

$$\int_{أ}^{ب} د(س)\,ءس = \int_{أ}^{جـ} د(س)\,ءس + \int_{جـ}^{ب} د(س)\,ءس \,. \qquad (٦-٣٦)$$

(٤) إذا كانت الدالة د قابلة للتكامل على الفترة [أ ، ب] وكانت د(س) ≥ ٠ على هذه الفترة فإنَّ :

$$\int_{أ}^{ب} د(س)\,ءس \geq ٠ \,. \qquad (٦-٣٧)$$

(٥) إذا كانت الدالة د قابلة للتكامل على الفترة المغلقة [أ ، ب] فإن :

$$\int_{أ}^{ب} د(س)\,ءس = - \int_{ب}^{أ} د(س)\,ءس \,. \qquad (٦-٣٨)$$

وإذا كانت أ < ب فإن :

$$\left| \int_{أ}^{ب} د(س)\,ءس \right| \leq \int_{أ}^{ب} |د(س)|\,ءس \,. \qquad (٦-٣٩)$$

(٦) تقدم هذه الخاصية بالنظرية التالية :

نظرية (٦-٥)

إذا كانت كل من $د_1$ ، $د_2$ قابلة للتكامل على [أ ، ب] وكانت $د_1 \le د_2$ على [أ ، ب] فإن :

$\int_{أ}^{ب} د_1(س)\, ءس \le \int_{أ}^{ب} د_2(س)\, ءس$.

البرهــان :

باستخدام الخاصية (٦-٣٥) :

$$\int_{أ}^{ب} د_1(س)\, ءس - \int_{أ}^{ب} د_2(س)\, ءس = \int_{أ}^{ب} \left(د_1(س) - د_2(س)\right) ءس$$

$$= \int_{أ}^{ب} (د_1 - د_2)(س)\, ءس$$

$$= \lim_{ن \to \infty} \sum_{ر=1}^{ن} (د_1 - د_2)(ح_ر)\, \Delta س_ر$$

$$= \lim_{ن \to \infty} \sum_{ر=1}^{ن} \left(د_1(ح_ر) - د_2(ح_ر)\right) \Delta س_ر \qquad (٦-٤٠)$$

لكن $د_1(ح_ر) - د_2(ح_ر) \le ٠$ لكل $ح_ر \in [س_{ر-1} ، س_ر] \subset [أ ، ب]$

وأيضاً $\Delta س_ر > ٠$.

وبالتالي فإن النهاية الموجودة في الطرف الأيسر من (٦-٤٠) تكون غير سالبة .

إذن :

$\int_{أ}^{ب} د_1(س)\, ءس - \int_{أ}^{ب} د_2(س)\, ءس \le ٠$

أي أن :

$\int_{أ}^{ب} د_1(س)\, ءس \le \int_{أ}^{ب} د_2(س)\, ءس$.

مثال (٦-٤٠)

إذا كانت $د(س) = \frac{٢}{س}$ ، $هـ(س) = \frac{٣}{س}$ فبرهن من دون حساب التكامل على أنّ :

$$\int_{٢}^{٤} د(س)\, ءس < \int_{٢}^{٤} هـ(س)\, ءس$$

الحــل :

$(د - هـ)(س) = \frac{٢}{س} - \frac{٣}{س} = \frac{٢ - ٣}{س} < ٠$ لكل $س \in [٢ ، ٤]$

إذن : $د(س) - هـ(س) < ٠$ لكل $س \in [٢ ، ٤]$

أي أن : $د(س) < هـ(س)$ لكل $س \in [٢ ، ٤]$.

إذن : من النظرية (٦-٥) ينتج أن :

$$\int_{٢}^{٤} د(س)\, ءس < \int_{٢}^{٤} هـ(س)\, ءس$$

نظرية (٦-٦)

نظرية القيمة المتوسطة للتكامل :

إذا كانت د دالة متصلة في [أ ، ب] فإنه يوجد نقطة $س_٠ \in [أ ، ب]$ بحيث :

$$\int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس = (ب - أ)\, د(س_٠)$$

البرهــان : (غير مطلوب)

بما أن الدالة د متصلة في [أ ، ب] فإنه يكون للدالة د قيمة عظمى ك وقيمة صغرى ل على الفترة [أ ، ب] ، بمعنى أنه يوجد $س_١$ ، $س_٢$ في [أ ، ب] بحيث يكون :

$د(س_1) = كـ$ ، $د(س_2) = ك$ وهكذا يكون:

$$ك \geq د(س) \geq كـ \quad \text{لكل } س \in [أ ، ب]$$

وباستخدام النظرية (٦-٥) نحصل على:

$$\int_{أ}^{ب} كـ \, ءس \leq \int_{أ}^{ب} د(س) \, ءس \leq \int_{أ}^{ب} ك \, ءس \; . \qquad (٦-٤١)$$

ولكن:

$$\int_{أ}^{ب} كـ \, ءس = كـ(ب - أ) \; . \qquad (٦-٤٢)$$

$$\int_{أ}^{ب} ك \, ءس = ك(ب - أ) \; . \qquad (٦-٤٣)$$

بالتعويض من (٦-٤٢) ، (٦-٤٣) في (٦-٤١) ينتج أنّ:

$$كـ(ب - أ) \leq \int_{أ}^{ب} د(س) \, ءس \leq ك(ب - أ)$$

بالقسمة على (ب - أ) مع ملاحظة أنّ ب - أ > ٠ ، لأن ب > أ نحصل على:

$$كـ \leq \frac{1}{ب - أ} \int_{أ}^{ب} د(س) \, ءس \leq ك \quad \text{أي أنّ:}$$

$$د(س_1) \leq \frac{1}{ب - أ} \int_{أ}^{ب} د(س) \, ءس \leq د(س_2)$$

وبما أن الدالة د متصلة على [أ ، ب] فإنه توجد نقطة س في الفترة المغلقة $[س_1 ، س_2] \subset [أ ، ب]$ تحقق المساواة الآتية:

$$د(س) = \frac{1}{ب - أ} \int_{أ}^{ب} د(س) \, ءس \; . \quad \text{أي أن:}$$

$$\int_{أ}^{ب} د(س) \, ءس = (ب - أ) \, د(س)$$

مثال (٦-٤١)

أوجد قيمة العدد س. الذي يحقق النظرية (٦-٦) للتكامل $\int_{٢}^{٥} (٤س - ٥)\, ءس$

الحـــل :

نفرض أن د(س) = ٤س − ٥ فتكون د دالة متصلة في الفترة [٢ ، ٥] لأنها كثيرة حدود وبالتالي تبعاً للنظرية (٦-٦) يوجد عدد س. ∈ [٢ ، ٥] بحيث :

$$\int_{٢}^{٥} د(س)\, ءس = (٥ - ٢)\, د(س.)$$

$$= ٣\, د(س.) \qquad (٦-٤٤)$$

وبحساب التكامل :

$$\int_{٢}^{٥} د(س)\, ءس = \int_{٢}^{٥} (٤س - ٥)\, ءس$$

$$= ٤ \int_{٢}^{٥} س\, ءس - \int_{٢}^{٥} ٥\, ءس$$

$$= ٤ \times \frac{٥^{٢} - ٢^{٢}}{٢} - ٥ \times (٥ - ٢)$$

$$= ٤٢ - ١٥ = ٢٧ \, , \qquad (٦-٤٥)$$

من (٦-٤٤) ، (٦-٤٥) نستنتج أنَّ :

$$٣\, د(س.) = ٢٧ \Leftrightarrow د(س.) = ٩$$

$$\Leftrightarrow ٤س. - ٥ = ٩$$

$$\Leftrightarrow ٤س. = ١٤$$

$$\Leftrightarrow س. = ٣\frac{١}{٢} \in [٢ ، ٥]$$

تمارين (٦ – ٥)

أبحث قابلية كل من الدوال للتكامل في المسائل التالية واحسب قيمة هذا التكامل إن وجد:

(١) د(س) = ⟦س⟧ − ٤ على [٢ ، ٤].

(٢) د(س) = |س − ٣| على [٣ ، ٤].

(٣) د(س) = |س + ٢| على [−٢ ، ٥].

(٤) د(س) = { س + ٣ عندما ٠ ≥ س > ٢ ؛ ٧ عندما س = ٢ } على [٠ ، ٢].

(٥) د(س) = { ٢س − ٤ عندما ١ ≥ س > ٣ ؛ جاس عندما س = ٣ } على [١ ، ٣].

(٦) د(س) = { ٧ عندما س = −١ ؛ ٢س + ٣ عندما −١ > س > ٢ ؛ ٥ عندما س = ٢ } على [−١ ، ٢].

(٧) د(س) = ⟦س² − ٥س + ٦⟧ + ٢ على [٠ ، ٤].

(٨) د(س) = { ٢س − ٥ عندما ٠ ≥ س > ٢ ؛ −٥ عندما ٢ ≥ س ≥ ٤ } على [٠ ، ٤].

(٩) إذا كانت د(س) = س^٢ ، هـ(س) = س تحقق أن :

$$\int_{٠}^{١} د(س)\,ءس < \int_{٠}^{١} هـ(س)\,ءس$$

وذلك بحساب الطرفين . هل يتفق هذا مع النظرية (٦ – ٥)؟

(١٠) وضّح لماذا يكون $\int_{١}^{٢} \frac{١}{س}\,ءس \leq \int_{١}^{٢} \frac{٢}{س}\,ءس$.

(١١) في المسائل التالية أوجد قيمة العدد س. الذي تعينه النظرية (٦–٦) للتكاملات التالية :

(أ) $\int^{٣} (٢س - ٣)\,ءس$.

(ب) $\int^{٤} س^٢\,ءس$.

(ج) $\int^{٤} (س^٢ - ٣)\,ءس$.

(د) $\int^{٣} (س^٢ - ٢س + ٣)\,ءس$.

(٦ – ٧) النظرية الأساسية لحساب التكامل

سنبحث في هذا البند العلاقة بين التفاضل والتكامل المحدد ليس فقط لأهميتها النظرية ، بل لأنها ستُسفر عن وسائل أكثر سهولة لحساب التكاملات المحدّدة في كثير من الحالات .

نظرية (٦-٧)

النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل – الجزء الأول :

إذا كانت الدالة د(س) متصلة في [أ ، ب] وكانت ى هي الدالة المعرّفة بواسطة :

$$ى(س) = \int_{أ}^{س} د(ع)\, دع \qquad لكل\ س \in [أ ، ب] ،$$

$$فإن \quad \frac{د}{دس} ى(س) = د(س)$$

البرهـان :

لنفرض أن س ، س + هـ نقطتان في [أ ، ب] حيث هـ مقدار صغير (موجب أو سالب) فيكون:

$$ى(س + هـ) = \int_{أ}^{س+هـ} د(ع)\, دع$$

$$= \int_{أ}^{س} د(ع)\, دع + \int_{س}^{س+هـ} د(ع)\, دع \qquad من\ (٦-٣٦)$$

$$أي\ أن\ ى(س + هـ) - ى(س) = \int_{س}^{س+هـ} د(ع)\, دع$$

وباستخدام النظرية (٦-٦) فإنه يوجد عدد سَ ∈ [س ، س + هـ] إذا كانت $هـ > ٠$ ، أو سَ ∈ [س + هـ ، س] إذا كانت $هـ < ٠$ (أي أن سَ تقع بين س ، س + هـ) بحيث:

$ى(س_٠ + هـ) - ى(س_٠) = (س_٠ + هـ - س_٠) د(س_٠)$

$= هـ \, د(س_٠)$

$\therefore \frac{ى(س_٠ + هـ) - ى(س_٠)}{هـ} = د(س_٠)$

ومنه $\frac{د}{دس} ى(س_٠) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ى(س_٠ + هـ) - ى(س_٠)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} د(س_٠)$

$= د(س_٠)$ من اتصال د على [أ ، ب].

ملحوظات (٦ – ٧) :

(١) النظرية (٦-٧) تعني أن التكامل المحدد $\int_{أ}^{س} د(ع) \, دع$ ، حيث الحد العلوي للتكامل متغير س ، هو دالة أصلية للدالة د .

(٢) نستنتج من النظرية (٦-٧) أن لكل دالة متصلة يوجد دالة أصلية.

والآن نعطي النظرية الأساسية لحساب التكامل التي تعطي طريقة حساب التكامل المحدد باستخدام التكامل غير المحدد وهذا ما سنستخدمه دائماً في إيجاد التكاملات المحددة.

نظرية (٦-٨)

النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل - الجزء الثاني :

إذا كانت الدالة د متصلة في [أ ، ب] وكانت ن دالة أصلية للدالة د على [أ ، ب] فإن :

$\int_{أ}^{ب} د(س) \, دس = ن(ب) - ن(أ)$

البرهان :

بما أن $\int_{\text{أ}}^{\text{س}} \text{د}(\text{ع})\, \text{ءع}$ دالة أصلية للدالة د (من النظرية (٦-٧))

وبما أن أي دالة أصلية للدالة د تكون على الصورة :

ل(س) + ث حيث ث ثابت حقيقي ، (من النظرية (٦-٢))

نستنتج أن :

$$\int_{\text{أ}}^{\text{س}} \text{د}(\text{ع})\, \text{ءع} = \text{ل}(\text{س}) + \text{ث} \qquad (٦-٤٦)$$

ولتعيين قيمة ث فإننا نضع س = أ في (٦-٤٦) فنحصل على :

$$\int_{\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د}(\text{ع})\, \text{ءع} = \text{ل}(\text{أ}) + \text{ث}$$

وحيث إن الطرف الأيمن يساوي صفراً (من ملحوظة (٦-٦))

إذن ل(أ) + ث = صفراً

أي أن ث = −ل(أ)

بالتعويض في (٦-٤٦) ينتج أن :

$$\int_{\text{أ}}^{\text{س}} \text{د}(\text{ع})\, \text{ءع} = \text{ل}(\text{س}) - \text{ل}(\text{أ}) . \qquad (٦-٤٧)$$

بوضع س = ب في (٦-٤٧) نحصل على :

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{ع})\, \text{ءع} = \text{ل}(\text{ب}) - \text{ل}(\text{أ})$$

وحيث إن $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\, \text{ءس} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{ع})\, \text{ءع}$.

إذن $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\, \text{ءس} = \text{ل}(\text{ب}) - \text{ل}(\text{أ})$.

ملحوظـة (٦ – ٨) :

إذا كانت ن دالة أصلية للدالة د على [أ ، ب] فإننا نكتب :

$$\int_{أ}^{ب} د(س)\, دس = \Big[ن(س)\Big]_{أ}^{ب}$$

$$= ن(ب) - ن(أ) .$$

مثال (٦–٤٢)

احسب التكامل $\int_{-٢}^{٢} (٥س^{٤} + ٣س^{٢})\, دس$

الحـــل :

$$\int د(س)\, دس = \int (٥س^{٤} + ٣س^{٢})\, دس$$

$$= س^{٥} + س^{٣} + ث$$

أي أنَّ : $ن(س) = س^{٥} + س^{٣}$ هي دالة أصلية للدالة د(س)

وعليه فإن : $\int_{-٢}^{٢} د(س)\, دس = \Big[ن(س)\Big]_{-٢}^{٢} = \Big[س^{٥} + س^{٣}\Big]_{-٢}^{٢}$

$$= (٢^{٥} + ٢^{٣}) - ((-٢)^{٥} + (-٢)^{٣})$$

$$= ٤٠ - (-٤٠) = ٨٠$$

ملحوظـة (٦ – ٩) :

الفرق ن(ب) − ن(أ) لا يختلف باختلاف الدالة الأصلية ن للدالة د ولذلك ففي المثال (٦ – ٤٢) أخذنا الدالة المقابلة

$ن(س) = س^{٥} + س^{٣}$ لأننا لو أخذنا الدالة :

$ن(س) = س^{٥} + س^{٣} + ث$ فإن التكامل $\int_{-٢}^{٢} د(س)\, دس$ لن يتغير.

مثال (٦-٤٣)

احسب $\int_{0}^{1} \frac{س}{(2س^2+3)^3}\, دس$

الحـــل :

$$\int_{0}^{1} \frac{س}{(2س^2+3)^3}\, دس = \frac{1}{4}\int_{0}^{1} (2س^2+3)^{-3}(4س)\, دس$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{(2س^2+3)^{-2}}{-2}\right]_{0}^{1} \quad \text{حسب (٦-١٧)}$$

$$= -\frac{1}{8}\left(\frac{1}{25} - \frac{1}{9}\right) = \frac{2}{225}$$

مثال (٦-٤٤)

احسب $\int_{0}^{\frac{ط}{3}} جتا^3 س\ جا س\ دس$

الحـــل :

باعتبار د(س) = جتاس فإن دَ(س) = − جاس .

وباستخدام (٦-١٧) نحصل على :

$$\int_{0}^{\frac{ط}{3}} جتا^3 س\ جا س\ دس = -\int_{0}^{\frac{ط}{3}} (جتاس)^3 (-جاس)\, دس$$

$$= -\left[\frac{(جتاس)^4}{4}\right]_{0}^{\frac{ط}{3}}$$

$$= -\left(\frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 - \frac{1}{4} \times 1\right)$$

$$= \frac{15}{64}$$

مثال (٦-٤٥)

احسب $\int_{٠}^{٢} س^{٢} \sqrt{س^{٣} + ١} \, ءس$

الحل :

نفرض أن $د(س) = س^{٣} + ١$ ، إذن $د'(س) = ٣س^{٢}$.

باستخدام العلاقة (٦-١٧) نحصل على :

$$\int_{٠}^{٢} س^{٢} \sqrt{س^{٣} + ١} \, ءس = \frac{١}{٣} \int_{٠}^{٢} (س^{٣} + ١)^{\frac{١}{٢}} (٣س^{٢}) \, ءس$$

$$= \frac{١}{٣} \left[\frac{(س^{٣} + ١)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} \right]_{٠}^{٢}$$

$$= \frac{٢}{٩} \left[(س^{٣} + ١)^{\frac{٣}{٢}} \right]_{٠}^{٢} = \frac{٢}{٩} \left[(٢^{٣} + ١)^{\frac{٣}{٢}} - (٠ + ١) \right]$$

$$= \frac{٢}{٩} (٢٧ - ١) = \frac{٥٢}{٩}$$

ويمكن حل هذا المثال بطريقة التكامل بالتعويض أيضاً ولكن بأسلوب آخر كما يلي :

لنفرض أن $ص = س^{٣} + ١$ ،

$ءص = (س^{٣} + ١)' \, ءس$

إذن $ءص = ٣س^{٢} \, ءس$

أي أن $س^{٢} \, ءس = \frac{١}{٣} \, ءص$

إذا كانت $س = ٠$ ، فإن $ص = ١$

وإذا كانت $س = ٢$ فإن $ص = ٩$

إذن $\int_{0}^{2} س^{2} \sqrt{س^{3} + 1}\ دس = \frac{1}{3} \int_{1}^{9} ص^{\frac{1}{2}}\ دص$

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{2}{3} ص^{\frac{3}{2}} \right]_{1}^{9}$$

$$= \frac{2}{9} \left[(9)^{\frac{3}{2}} - (1)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{52}{9}$$

وهكذا يتضح أنه لو استخدمنا التعويض $س = م(ص)$ فإن :

$$\int_{أ}^{ب} د(س)\ دس = \int_{جـ}^{ء} د(م(ص))\ م'(ص)\ دص$$

حيث $م(جـ) = أ$ ، $م(ء) = ب$.

تمارين (٦ – ٦)

احسب التكاملات الآتية :

(١) $\int_{١}^{٦}$ ٢ ءس .

(٢) $\int_{-١}^{١}$ ءس .

(٣) $\int_{١}^{٣}$ ٢س ءس .

(٤) $\int_{٠}^{-٢}$ (س^{٢} + ٢س) ءس .

(٥) $\int_{١}^{٤}$ (٤س^{٣} − ٣س^{٢}) ءس .

(٦) $\int_{١}^{٢}$ (٣س^{٢} − ٢س + ٣) ءس .

(٧) $\int_{-١}^{٣}$ (س + ٢) (٣س − ٢) ءس .

(٨) $\int_{١}^{١}$ (٢س − ٣) (٣س + ١) ءس .

(٩) $\int_{-١}^{١}$ (س^{٢} + ٢) (س^{٢} + ٣) ءس .

(١٠) $\int_{٢}^{٣}$ (س^{٢} − ٥س + ٦)^{٢} ءس .

(١١) $\int_{-١}^{٢}$ $\frac{س^{٣} - ٢٧}{س - ٣}$ ءس .

(١٢) $\int_{١}^{١}$ $\frac{س^{٢} - ٥س + ٦}{س - ٢}$ ءس .

احسب التكاملات في كل مما يلي :

(١٣) $\int_{١}^{٢}$ (س + ٣)^{٢} ءس .

(١٤) $\int_{١}^{٤}$ (٣س − ٥)^{٢} ءس .

(١٥) $\int \sqrt{\text{س} - ٢}\ \text{ءس}$.

(١٦) $\int \dfrac{\text{س}^٣ + ١}{\sqrt{\text{س}^٢ + \text{س} + ١}}\ \text{ءس}$.

(١٧) $\int \dfrac{\text{جاس}}{\text{جتا}^٢\text{س}}\ \text{ءس}$.

(١٨) $\int \dfrac{\text{س}}{(٤ + \text{س}^٢)^٢}\ \text{ءس}$.

(١٩) $\int \dfrac{\text{قا}^٢\text{س}}{(٢ + \text{ظاس})^٢}\ \text{ءس}$.

(٢٠) $\int \sqrt{\text{س}^٤ - ٣\text{س}^٢ + ٤}\ (٢\text{س}^٢ - ٣)\ \text{ءس}$.

(٢١) $\int (٣\text{س}^٢ - ٢\text{س})(٩\text{س}^٢ - ٤\text{س})\ \text{ءس}$.

(٢٢) $\int (٥\text{س}^٢ + ١٢\text{س}^٣)(٣٥\text{س}^٢ + ٣٦\text{س}^٣)\ \text{ءس}$.

(٢٣) $\int_{٢}^{٣} (٢\text{س} - ٣)^٢\ \text{ءس}$.

(٢٤) $\int \sqrt{٢٧\text{س} - ٣}\ \text{ءس}$.

(٢٥) نحسب تكامل د المعرفة كالتالي:

$$\text{د(س)} = \begin{cases} ٢\text{س} & \text{عندما س} < \ldots \\ ٢\text{س}^٢ + ٤ & \text{عندما س} > \ldots \end{cases}$$

على [−١ ، ٣].

(٢٦) اجري التكاملات الآتية:

(أ) $\int_{١}^{\text{س}} (\text{ص}^٢ + ٤\text{ص}^{\frac{٣}{٢}})\ \text{ءص}$ ، س > ١

(ب) $\int_{١}^{\text{س}} (\text{ص}^{\frac{٢}{٣}} + \text{ص}^{\frac{١}{٢}})\ \text{ءص}$ ، س > ١

(ج) $\int_{٠}^{ب}$ (ص^{٢} + ٢ص + ٣) ءص

(د) $\int_{٠}^{ب}$ (٥ص^{٤} + ٣ص^{٢} + ٤) ءص .

احسب التكاملات في كل مما يلي :

(٢٧) $\int_{٠}^{٩}$ $\sqrt{\text{س}}$ ءس .

(٢٨) $\int_{\frac{ط}{٦}}^{\frac{ط}{٢}}$ $\frac{\text{جتاس}}{\sqrt{\text{جاس}}}$ ءس .

(٢٩) $\int_{٠}^{\frac{ط}{٢}}$ جا^{٤}س جتاس ءس .

(٣٠) $\int_{\frac{ط}{٦}}^{\frac{ط}{٣}}$ ظاس قا^{٢}س ءس .

تمارين عامة

في المسائل من (١) إلى (٤) أثبت أن ل دالة أصلية مقابلة للدالة د في الفترة [أ ، ب] المعطاة:

(١) ل(س) = ٤ $\sqrt{س^{٢} + ٣}$ ، د(س) = $\frac{٤س}{\sqrt{س^{٢} + ٣}}$

[أ ، ب] = [−١ ، ٠]

(٢) ل(س) = ظا^{٢}س ، د(س) = ٢ظاس قا^{٢}س

[أ ، ب] = [٠ ، $\frac{ط}{٤}$]

(٣) ل(س) = جتا(١ − ٢س) ، د(س) = ٢ جا(١ − ٢س)

[أ ، ب] = [$\frac{١ - ط}{٢}$ ، $\frac{١ + ط}{٢}$]

(٤) ل(س) = − $\frac{١}{٤}$ جتا^{٤}س − $\frac{١}{٣}$ جتا^{٣}س ، د(س) = جاس جتا^{٢}س (جتاس + ١)

[أ ، ب] = [٠ ، $\frac{٥ط}{٦}$]

(٥) أوجد التكاملات الآتية:

(أ) $\int$ (س − ١) $\sqrt{٢ - ٢س}$ ءس

(ب) $\int \frac{١}{\sqrt{٢س - ١}}$ ءس

(جـ) $\int (٣ - ٥س)^{\frac{٢}{٣}}$ ءس

(د) $\int$ جا^{٢}(٢س − ١) ءس

(هـ) $\int$ ظا٢س قا^{٢}٢س ءس

(د) $\int \sqrt{جا ٥س + ١}\ جتا ٥س\ ءس$.

(٦) أوجد الدالة التي تربط بين المسافة ف والزمن ن إذا كانت الدالة التي تربط بين السرعة والزمن ن معطاة كالتالي:

(أ) $ع = ٢ + ٣ن$ حيث ف = ٣ عندما ن = ٠ .

(ب) $ع = ن^٢ + ٤ن - ٥$ حيث ف = ٤ عندما ن = ١ .

(ج) $ع = جتا ٢ن$ حيث ف = ٢ عندما ن = ٠ .

(٧) يتحرك جسيم في خط مستقيم بتسارع $ت = ٦ن - ٤$ أوجد العلاقة بين السرعة والزمن علماً بأن سرعته بعد ٣ ثوانٍ من بدء الحركة (التي بدأت عند ن = صفراً) تساوي ٢٠ م/ ثانية .

(٨) إذا كان ميل المماس لمنحنى ما عند أي نقطة (س ، ص) يعطى بالمعادلة $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٣س - ١}{٢\sqrt{س}}$ (س > ٠).

فأثبت أن معادلة هذا المنحنى هي $ص^٢ = س (س - ١)^٢$ علماً بأنه يمر بالنقطة (٤ ، ١٠)

(٩) ابحث قابلية التكامل للدوال المذكورة على [أ ، ب] وإذا كانت كذلك فما حسب تكاملاتها:

(أ) $د(س) = \sqrt{٤ - س^٢}$ حيث [أ ، ب] = [−٢ ، ٣].

(ب) $د(س) = ٣س^٢ + ٢س$ حيث [أ ، ب] = [١ ، ٤].

(١٠) في كل مما يلي أوجد تكامل الدالة على الفترة المعطاة واحسب المساحة الواقعة تحت منحنى الدالة وفوق الفترة المعطاة ثم تحقق من تساوي النتيجتين:

(أ) $د(س) = س$ على [٠ ، ٥].

(ب) $د(س) = |س - ٣|$ على $[-٤ ، ١]$.

(ج) $د(س) = |٢س - ٥|$ على $[٠ ، ٣]$.

احسب التكاملات في كل مما يلي:

(١١) $\int_{١}^{٢} (س^{٢} - ٣س)\, دس$.

(١٢) $\int_{١}^{٢} (٣س + ٢)\, دس$.

(١٣) $\int_{١}^{٢} (٥س^{٤} + ٣)\, دس$.

(١٤) $\int_{١}^{٥} ٢\sqrt{س - ١}\, دس$.

(١٥) $\int_{٣}^{٤} \sqrt{س - ٣}\, دس$.

(١٦) $\int_{-٢}^{-١} (س + ١)(س^{٢} - ٢)\, دس$

(١٧) $\int_{١}^{٤} (س^{\frac{١}{٢}} + ٤س)\, دس$.

(١٨) $\int_{١}^{٢} \frac{ع^{٢} + ١}{\sqrt{ع}}\, دع$.

(١٩) $\int_{١}^{٢} (ص^{٢} - \frac{١}{ص^{٢}})\, دص$.

(٢٠) $\int_{١}^{٢} \frac{(٢س + ١)(٢س - ١)}{س^{٢}}\, دس$.

(٢١) $\int_{٠}^{١} \frac{س^{٢} - س - ٢}{س - ٢}\, دس$.

(٢٢) $\int_{١}^{٢} (س^{٢} + ٣)^{٢}\, دس$.

(٢٣) $\int_{-١}^{٢} (س^{٢} - ١)^{٢}\, دس$.

(٢٤) $\int_{٠}^{١} \sqrt{س^{٢} - ٣س + ٤}\,(٤س - ٦)\, دس$.

(٢٥) $\int$ س $\sqrt{١ + س}$ دس .

(٢٦) $\int_{٠}^{٣}$ س $\sqrt{٩ - س^{٢}}$ دس .

(٢٧) $\int_{-٤}^{-٣}$ س $\sqrt{٢٥ - س^{٢}}$ دس .

(٢٨) $\int_{٠}^{\frac{ط}{٢}}$ جا^{٣}س جتاس دس .

(٢٩) $\int$ س^{٢} $\sqrt{س^{٣} + ١}$ دس .

(٣٠) $\int$ ص^{٤} $\sqrt{١ + ص^{٣}}$ دص ،   س > −١ .

(٣١) $\int \frac{٢س^{٣} - ٢س^{٢} + ٣}{س^{٢}}$ دس ،   ص > ٠ .

(٣٢) $\int$ ص^{٢} $\sqrt{ص^{٤} + ٢}$ دص .

(٣٣) $\int$ س^{٥} $\sqrt{س^{٢} + ٣}$ دس .

(٣٤) $\int_{\frac{ط}{٦}}^{\frac{ط}{٤}}$ ظا^{٢} ٣س قا^{٢} ٣س دس .

الباب السابع

تطبيقات حساب التكامل المحدّد

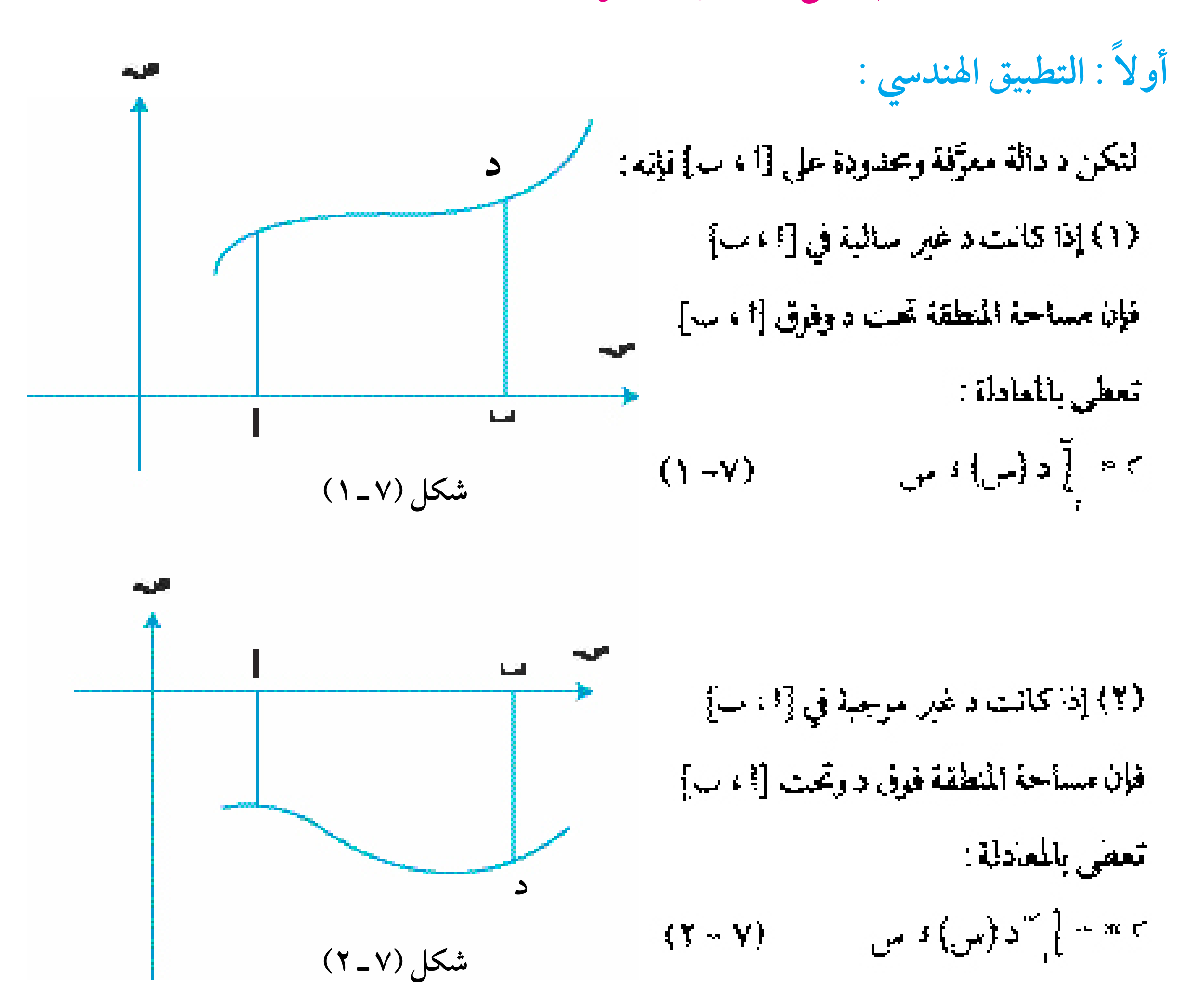
٧ – ١ إيجاد مساحات بعض المناطق المستوية.

٧ – ٢ إيجاد حجوم الأجسام الدورانية.

٧ – ٣ مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية وتكاملها.

٧ – ١ مساحات بعض المناطق المستوية :

أولاً : التطبيق الهندسي :



شكل (٧ـ١)

شكل (٧ـ٢)

لتكن د دالة معرّفة ومحدودة على [أ ، ب] فإنه :

(١) إذا كانت د غير سالبة في [أ ، ب]

فإن مساحة المنطقة تحت د وفوق [أ ، ب]

تعطى بالمعادلة :

$$\text{م} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{ء}\,\text{س} \qquad (٧-١)$$

(٢) إذا كانت د غير موجبة في [أ ، ب]

فإن مساحة المنطقة فوق د وتحت [أ ، ب]

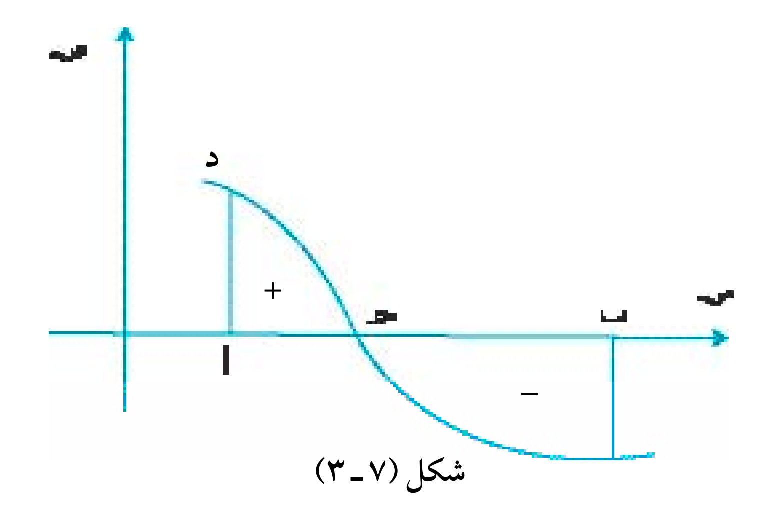
تعطى بالمعادلة :

$$\text{م} = -\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{ء}\,\text{س} \qquad (٧-٢)$$

والسبب في وضع إشارة (–) هو أن $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{ء}\,\text{س}$ يصبح عدداً سالبًا إذا كانت د(س) < ٠ لكل س ∈ [أ ، ب]، فينبغي أن نغير إشارته إذا أردنا أن تكون المساحة م عدداً غير سالب كما هي العادة.

(٣) إذا كانت جـ ∈ [أ ، ب] وكانت د غير سالبة في [أ ، جـ] وغير موجبة في [جـ ، ب] فإن مساحة المنطقة الناتجة من اتحاد المنطقتين اللتين تقع إحداهما تحت د وفوق [أ ، جـ] والأخرى فوق د وتحت [جـ ، ب] تعطى بالمعادلة

$$م = \int_{أ}^{جـ} د(س)\, ء س - \int_{جـ}^{ب} د(س)\, ء س \qquad (٧-٣)$$



شكل (٧ ـ ٣)

وبصفة عامة فإن المساحة المحصورة بين منحنى الدالة ص = د(س) والمحور السيني والمستقيمين س = أ ، س = ب هي :

$$م = \int_{أ}^{ب} |د(س)|\, ء س \qquad (٧-٤)$$

ونقدم فيما يلي مزيداً من الأمثلة على كيفية إيجاد مساحات المناطق المستوية عن طريق التكامل.

مثال (٧-١)

أوجد المساحة المحصورة بين المنحنى ص = د(س) = $س^٢$ ومحور السينات والمستقيمين س = ٠ ، س = ٣.

الحــل :

د متصلة وغير سالبة في [٠ ، ٢]

إذن د قابلة للتكامل على [٠ ، ٣]

لذا فإن :

$$م = \int_{٠}^{٣} س^{٢} \, ءس$$

$$= \left[\frac{١}{٣} س^{٣} \right]_{٠}^{٣}$$

= ٩ وحدات مربعة

ص = س^{٢}

٣

شكل (٧ ـ ٤)

مثال (٧–٢)

احسب المساحة المحصورة بين المنحنى ص = $-\sqrt{س}$ والمستقيمين س = ٠، س = ٤ ومحور السينات.

الحــل : الدالة ص غير موجبة في الفترة

[٠ ، ٤]

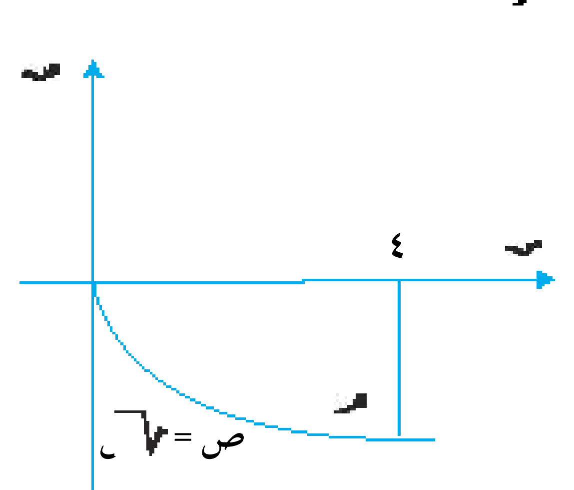
إذن المساحة المحدودة بالمستقيمين

س = ٠، س = ٤ وتحت محور السينات هي :

$$م = -\int_{٠}^{٤} -\sqrt{س} \, ءس$$

$$= \left[\frac{٢ س^{\frac{٣}{٢}}}{٣} \right]_{٠}^{٤}$$

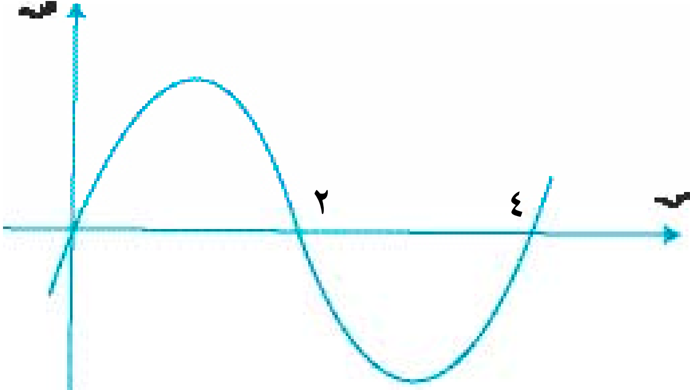
$= \frac{١٦}{٣}$ وحدة مربعة



شكل (٧ ـ ٥)

مثال (٧-٣)

أوجد المساحة المحصورة بين المنحنى ص = س³ − ٦ س² + ٨ س والمستقيمين س = ٠ ، س = ٤



الحـــل : ص = ٠

⟸ س (س² − ٦ س + ٨) = ٠

⟸ س (س − ٢) (س − ٤) = ٠

∴ س = ٠ أو س = ٢ أو س = ٤

لاحظ أن إشارة ص عبارة عن إشارة س × إشارة (س² − ٦ س + ٨)

ونعين إشارة ص (على خط الأعداد) كالآتي :

	−∞	٠	٢	٤	∞
إشارة س	− −	+	+	+ +	
إشارة س² − ٦ س + ٨	+ +	+	−	+ +	
إشارة ص	− −	+	−	+ +	

ص ≥ ٠ لكل س ∈ [٠ ، ٢] يعني أن م١ = $\int_{0}^{2}$ (س³ − ٦ س² + ٨ س) ءس

م١ = [$\frac{1}{4}$ س⁴ − ٢ س³ + ٤ س²]$_{0}^{2}$ = ٤ (٧ − ٥)

ص ≤ ٠ لكل س ∈ [٢ ، ٤] يعني أنّ :

$$م_٢ = -\int_{٢}^{٤} (س^٣ - ٦س^٢ + ٨س)\, ءس$$

$$= -\left[\frac{١}{٤} س^٤ - ٢س^٣ + ٤س^٢ \right] = ٤ \qquad (٧ - ٦)$$

من (٧ – ٥) ، (٧ – ٦) ينتج أن المساحة المطلوبة هي :

$م = م_١ + م_٢$

$م = ٤ + ٤ = ٨$ وحدات مربعة

مثال (٧–٤)



أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين

$ص = ٨ - س^٢$

$ص = س^٢$ والمستقيمين $س = ٠$ ، $س =$

شكل (٧ ـ ٧)

الحـــل :

نفرض أن $ص_١ = ٨ - س^٢$

، $ص_٢ = س^٢$

بما أن $ص_١ \geq ٠$ ، $ص_٢ \geq ٠$ لكل $س \in [٠ ، ١]$ ، $ص_١ \geq ص_٢$ كما بالشكل (٧ - ٧) فإن المساحة المطلوبة م هي الفرق بين المساحة $م_١$ الواقعة تحت $ص_١$ والمساحة $م_٢$ الواقعة تحت $ص_٢$ بين صفر ، ١ :

$$م = م_1 - م_2$$

$$= \int_{}^{1} (8 - س^2)\, ءس - \int_{}^{1} (س^2)\, ءس$$

$$= \int_{}^{1} (8 - 2س^2)\, ءس \qquad \text{(لماذا؟)}$$

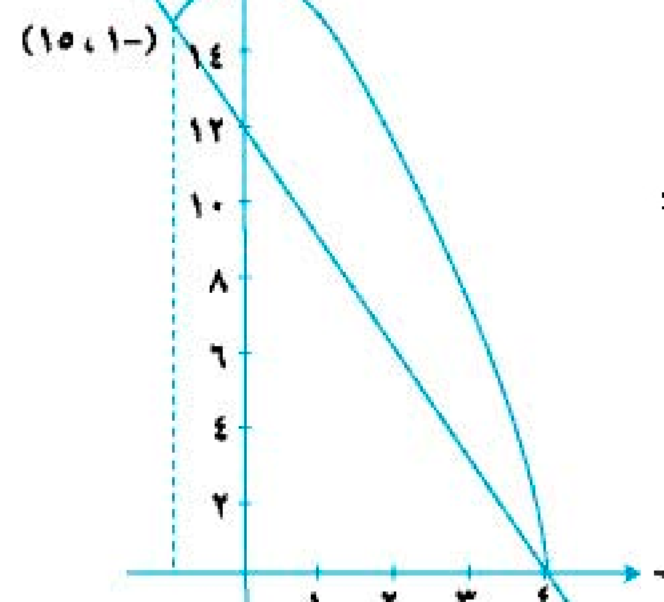
$$= \left[8س - \frac{2}{3} س^3 \right]$$

$$= 7\frac{1}{3} \text{ وحدة مربعة}$$

مثال (٧-٥)

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين :

$$ص = 16 - س^2 ، ص = 12 - 3س$$



شكل (٧ـ٨)

الحـــل :

نبحث عن تقاطع المنحنيين فنجده :

$$(4 ، 0) ، (-1 ، 15)$$

فتكون المساحة :

$$م = \int_{-1}^{4} (16 - س^2)\, ءس - \int_{-1}^{4} (12 - 3س)\, ءس$$

$$= \left[16س - \frac{1}{3} س^3 \right]_{-1}^{4} - \left[12س - \frac{3}{2} س^2 \right]_{-1}^{4}$$

$$= 58\frac{1}{3} - 37\frac{1}{2}$$

$$= 20\frac{5}{6} \text{ وحدة مربعة}$$

مثال (٧-٦)

احسب مساحة المنطقة الواقعة بين بيانات الدوال التالية :

$ص = س^2$ ، $ص = س + ٦$

$س = ٠$ ، $س = ٢$

شكل (٧ _ ٩)

الحـــل :

انظر الشكل (٧ – ٩)

تلاحظ هنا أن مساحة المنطقة المطلوبة تساوي مساحة المنطقة م ا ج د ناقصاً مساحة المنطقة م ا ب فإذا رمزنا للمساحة المطلوبة بالحرف م وللدالة التي قاعدتها $ص = س + ٦$ بالرمز $د_1$ وللدالة التي قاعدتها $ص = س^2$ بالرمز $د_2$ فإنه يكون :

$$م = \int_{٠}^{٢} \left(د_1(س) - د_2(س) \right) ءس$$

$$م = \int_{٠}^{٢} (س + ٦) ءس - \int_{٠}^{٢} س^2 ءس$$

$$م = \frac{٣٤}{٣} \text{ وحدة مربعة}$$

مثال (٧-٧)

احسب مساحة المنطقة الواقعة بين المنحنيين :

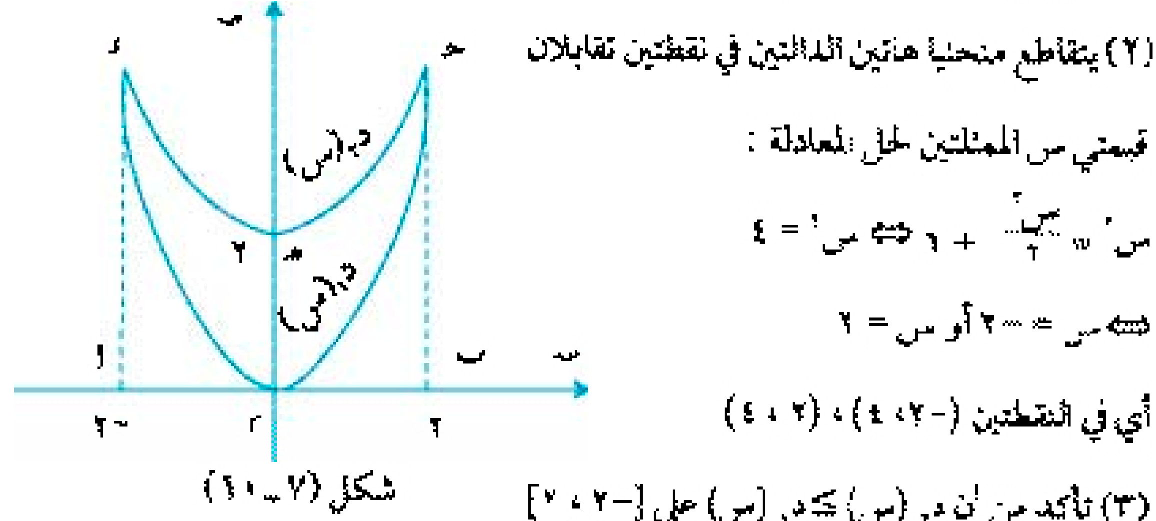
$ص = د_1(س) = س^2$ ، $ص = د_2(س) = \frac{س^2}{٢} + ٢$

الحـــل :

نلاحظ ما يلي :

(١) كل من الدالتين المعرفتين في نص التمرين دالة غير سالبة

(٢) يتقاطع منحنيا هاتين الدالتين في نقطتين تقابلان



شكل (٧ - ١٠)

قيمتي س المنتمين لحل المعادلة :

$$\text{س}^{٢} = \frac{\text{س}^{٢}}{٢} + ٢ \Leftrightarrow \text{س}^{٢} = ٤$$

$$\Leftrightarrow \text{س} = -٢ \text{ أو } \text{س} = ٢$$

أي في النقطتين (−٢ ، ٤) ، (٢ ، ٤)

(٣) تأكد من أن $\text{د}_{٢}(\text{س}) \geq \text{د}_{١}(\text{س})$ على [−٢ ، ٢]

(٤) الشكل التقريبي هو الشكل (٧ - ١٠) ، المساحة المطلوبة هي حاصل طرح مساحة المنطقة أ ب حـ م د من مساحة المنطقة أ ب حـ هـ د أي :

$$\text{م} = \int_{-٢}^{٢} \text{د}_{٢}(\text{س})\,\text{دس} - \int_{-٢}^{٢} \text{د}_{١}(\text{س})\,\text{دس} = \int_{-٢}^{٢} \left(\text{د}_{٢}(\text{س}) - \text{د}_{١}(\text{س})\right)\text{دس}$$

وبما أن الشكل متناظر حول المحور ص فإن :

$$\text{م} = ٢\int_{٠}^{٢} \left(\text{د}_{٢}(\text{س}) - \text{د}_{١}(\text{س})\right)\text{دس} = ٢\int_{٠}^{٢} \left(\frac{\text{س}^{٢}}{٢} + ٢ - \text{س}^{٢}\right)\text{دس}$$

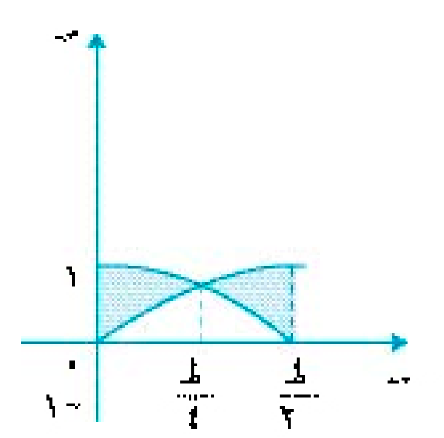
$$= ٢\int_{٠}^{٢} \left(-\frac{\text{س}^{٢}}{٢} + ٢\right)\text{دس} = ٢\left[-\frac{\text{س}^{٣}}{٦} + ٢\text{س}\right]_{٠}^{٢} = \frac{١٦}{٣} \text{ وحدة مربعة}$$

مثال (٧-٨)

احسب مساحة المنطقة الواقعة بين

المنحنيات : ص = جا س، ص = جتا س ،

س = ٠ ، س = $\frac{ط}{٢}$ كما هو ظاهر في الشكل (٧ - ١١)



شكل (٧ - ١١)

الحــل :

يمكن اعتبار المنطقة التي نريد حساب مساحتها مكونة من منطقتين :

الأولى : المتعلقة بالفترة [٠ ، $\frac{ط}{٤}$] ومساحتها :

$$م_١ = \int_{٠}^{\frac{ط}{٤}} (جتا س - جا س) ءس = [جا س + جتا س]_{٠}^{\frac{ط}{٤}}$$

$$= \frac{٢\sqrt{٢}}{٢} - ١ = \sqrt{٢} - ١$$

الثانية : المتعلقة بالفترة [$\frac{ط}{٤}$ ، $\frac{ط}{٢}$] ومساحتها :

$$م_٢ = \int_{\frac{ط}{٤}}^{\frac{ط}{٢}} (جا س - جتا س) ءس = [- جتا س - جا س]_{\frac{ط}{٤}}^{\frac{ط}{٢}}$$

$$= - ١ - \{ - \frac{٢\sqrt{٢}}{٢} \} = \sqrt{٢} - ١$$

والمساحة المطلوبة م = م$_١$ + م$_٢$ = ($\sqrt{٢}$ - ١) + ($\sqrt{٢}$ - ١) = ٢ ($\sqrt{٢}$ - ١)

تمارين (٧ – ١)

في كل مما يأتي أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالمنحني ومحور السينات والمستقيمات المبينة مع كل منها :

(١) ص = ٢س + ٣ ؛	س = −١ ،	س = ٣
(٢) ص = ٣ − ٤س ،	س = ١ ،	س = ٤
(٣) ص = ٨ − ٢س ،	س = ٠ ،	س = ٦
(٤) ص = |س ٣| ،	س = ٦ ؛	س = ٤
(٥) ص = س − ٥ ،	س = ٢ ،	س = ٦
(٦) ص = ٣س^{٢} ،	س = −٢ ،	س = ٠
(٧) ص = س^{٢} − ٤س + ٣ ،	س = ١ ؛	س = ٣
(٨) ص = س^{٢} − ٢س − ٨ ،	س = ٠ ،	س = ٤
(٩) ص = س^{٢} − س − ٢ ،	س = −٢ ،	س = ٢
(١٠) ص = س^{٢} − س − ٦ ،	س = ٠ ،	س = ٦
(١١) ص = ٤س^{٢} ،	س = ٠ ،	س = ٢
(١٢) ص = س^{٢} ،	س = −٢ ،	س = ٤
(١٣) ص = −س^{٣} ،	س = −٤ ،	س = ٢

(١٤) $\text{ص} = \text{س}(\text{س}-2)(\text{س}-3)$ ، $\text{س} = 0$ ، $\text{س} = 3$

(١٥) $\text{ص} = \sqrt{2\text{س} + 1}$ ، $\text{س} = 0$ ، $\text{س} = 4$

(١٦) $\text{ص} = \frac{2}{\sqrt{2\text{س} + 1}}$ ، $\text{س} = 0$ ، $\text{س} = 4$

(١٧) $\text{ص} = \text{س}\sqrt{3\text{س}^2 + 1}$ ، $\text{س} = 0$ ، $\text{س} = 2$

(١٨) $\text{ص} = \frac{\text{س}}{\sqrt{2\text{س}^2 + 1}}$ ، $\text{س} = 0$ ، $\text{س} = 2$

(١٩) $\text{ص} = \frac{1}{(2\text{س} + 1)^2}$ ، $\text{س} = 1$ ، $\text{س} = 2$

(٢٠) $\text{ص} = \sqrt{1 + 3\text{س}}$ ، $\text{س} = 0$ ، $\text{س} = 1$

(٢١) أوجد نقط تقاطع المنحنيين $\text{ص} = 2 - \text{س}^2$ ، $\text{ص} = -\text{س}$ ثم أوجد مساحة المنطقة المحصورة بينهما.

(٢٢) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين: $\text{ص} = 3\text{س} - \text{س}^2$ ، $\text{ص} = 3 - \text{س}$.

(٢٣) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $\text{ص} = \text{جا س}$ ، $\text{ص} = \text{جتا س}$ والمستقيمين $\text{س} = 0$ ، $\text{س} = \frac{\pi}{4}$.

(٢٤) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $\text{ص} = \text{س}^2$ ، $\text{ص} = 4$ وإذا رسم المستقيم $\text{ص} = \text{أ}$ فقسم المساحة المحصورة بين هذين المنحنيين إلى جزأين متساويين فما قيمة أ ؟

(٢٥) أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمجموعتين :

$\{$(س ، ص) : ص = س^2 − ٢ س^3 $\}$

$\{$(س ، ص) : ص = س^3 $\}$

(٢٦) أوجد باستخدام التكامل مساحة مثلث قائم الزاوية طول قاعدته ا وارتفاعه ب .

(٢٧) معادلة منحني هي : ص = س (٢ − س)^2 . احسب مساحة المنطقة المحصورة بين هذا المنحني والمحور السيني والمستقيمين الرأسيين المارين بالنقطة العظمى المحلية والصغرى المحلية.

ثانياً : تطبيقات على الميكانيك :

تدريب (٧-٣)

أوجد السرعة والتسارع عند قيمة ن المعطاة (الوحدة المستخدمة السنتيمتر والثانية)

ف = ٢٠ ن + ١٦ ن^٢ ، ن = ١ ث

مثال (٧-١٢)

تتحرك نقطة مادية من السكون على خط مستقيم بحيث يكون تسارعها في نهاية زمن قدره ن ثانية يساوي ١٦ - ١٦ ن قدم/ ث^٢. أوجد سرعتها بعد ٢ ثوان ثم أوجد إزاحتها في نهاية هذه المدة

الحـــل : لنفرض أن النقطة بدأت تتحرك عند اللحظة ن = صفراً.

سبق أن عرفنا أن السرعة = مشتقة الإزاحة بالنسبة للزمن، والتسارع = مشتقة السرعة بالنسبة للزمن.

أي أن : $ع = \frac{دف}{دن}$ ، و $ت = \frac{دع}{دن}$

إذن : $ف = \int ع \, دن$ ، $ع = \int ت \, دن$

إذن حدود التكامل من ن = صفراً إلى ن = ٣ فيصبح

$ع = \int_{٠}^{٣} (١٦ - ١٦ن) \, دن = \int_{٠}^{٣} ١٦ \, دن - \int_{٠}^{٣} ١٦ن \, دن$

$= ١٦ \int_{٠}^{٣} دن - ١٦ \int_{٠}^{٣} ن \, دن = ١٦ [ن]_{٠}^{٣} - ١٦ \left[\frac{ن^٢}{٢}\right]_{٠}^{٣}$

$= ١٦(٣ - ٠) - ١٦\left(\frac{٩ - صفر}{٢}\right) = ٤٨ - ٧٢ = -٢٤$ قدماً/ ثانية.

كما أن $ف = \int_{صفر}^{٣} (١٦ن - ٨ن^٢)\, ءن = ١٦ \int_{صفر}^{٣} ن\, ءن - ٨ \int_{صفر}^{٣} ن^٢\, ءن$

$= ١٦ \left[\frac{ن^٢}{٢}\right]_{صفر}^{٣} - ٨ \left[\frac{ن^٣}{٣}\right]_{صفر}^{٣} = ١٦ \left[\frac{٩ - صفر}{٢}\right] - ٨ \left[\frac{٢٧ - صفر}{٣}\right]$

$= ٧٢ - ٧٢ = $ صفراً (فسّر ذلك)

مثال (٧-١٣)

يتحرك جسيم على خط مستقيم حسب القانون $ع(ن) = ٤ن^٣ - ٨ن + ٢$ حيث ع(ن) تقاس بالسرعة قدم/ث. أوجد إزاحة الجسيم من ن = صفراً إلى ن = ٤.

الحـــل : نعلم أن الإزاحة = تكامل السرعة

$ف(ن) = \int ع(ن)\, ءن$

وحيث إن حدود الفترة الزمنية هي صفر، ٤

إذن $ف(ن) = \int_{صفر}^{٤} (٤ن^٣ - ٨ن + ٢)\, ءن$

$= ٤ \int_{صفر}^{٤} ن^٣\, ءن - ٨ \int_{صفر}^{٤} ن\, ءن + ٢ \int_{صفر}^{٤} ءن$

$= ٤ \left[\frac{ن^٤}{٤}\right]_{صفر}^{٤} - ٨ \left[\frac{ن^٢}{٢}\right]_{صفر}^{٤} + ٢ \left[ن\right]_{صفر}^{٤}$

$= ٤ \left[\frac{٢٥٦ - صفر}{٤}\right] - ٨ \left[\frac{١٦ - صفر}{٢}\right] + ٢ \left[٤ - صفر\right]$

$= ٢٥٦ - ٤(١٦) + ٢(٤) = ٢٠٠$ قدم

تماريـن (٧ – ٢)

(١) يتحرك جسيم في خــط مستقيم وكانت سرعته ع عند أي لحظــة ن تعطى بالمعادلــة $ع = ن^{٢} - ٢$. فأوجد إزاحة الجسيم خلال الفترة من ن = ٢ إلى ن = ٥ .

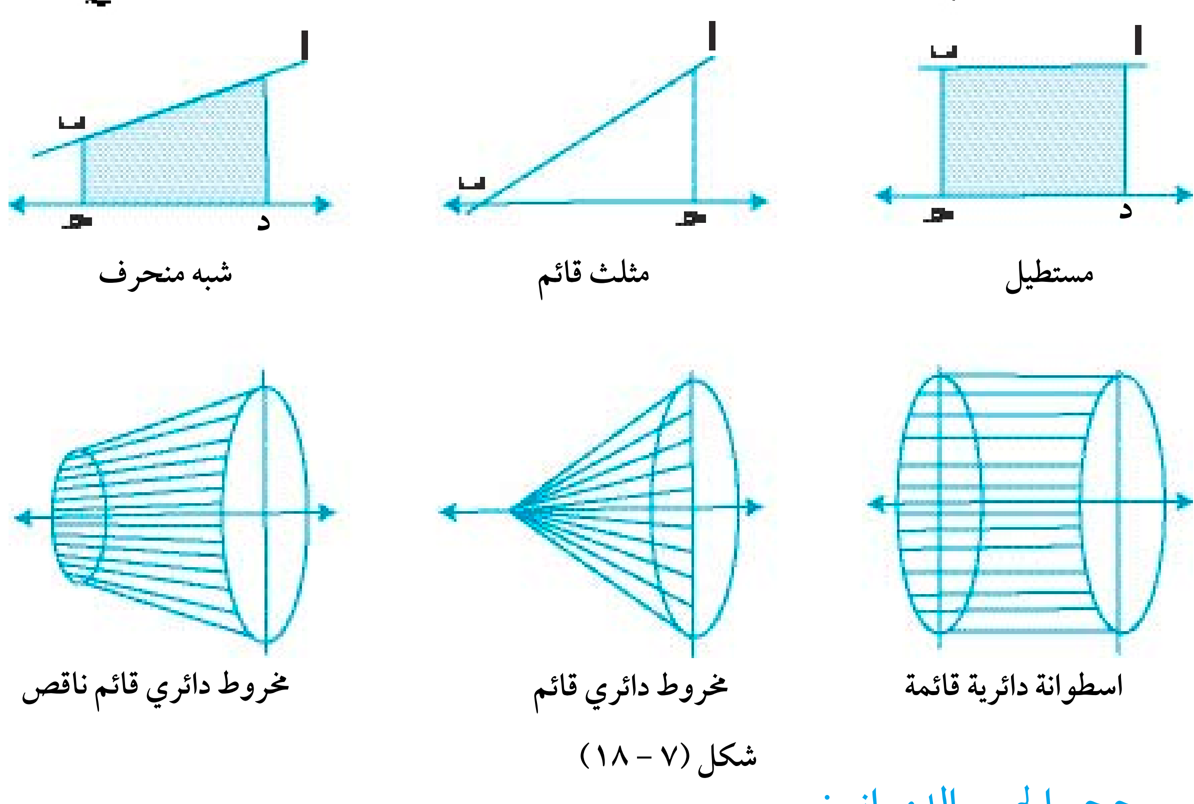
(٢) يتحرك جسم من السكون في خط مستقيم حسب القانون ت (ن) = ن – ٢ حيث ت (ن) تمثل التسارع بالقدم / ث ٢. أوجد سرعة الجسم من ن = ١ إلى ن = ٣ ، ثم أوجد إزاحته خلال هذه الفترة.

(٣) يتحرك جسيم من السكون في خط مستقيم وكان تسارعه عند أي لحظة ن تعطى بالمعادلة $ت = ٢ ن^{٢}$ إذا كانت ن = صفراً هي لحظة بدء الحركة فأوجد سرعته بعد ٥ ثوان من بدء حركته ثم أوجد إزاحة الجسيم بعد ٢ ثانية من بدء حركته.

(٤) تتحرك نقطة مادية من السكون على خط مستقيم بحيث يكون تسارعها في نهاية زمن قدره ن ثانية يساوي $٢ ن^{٢} - ٢ ن - ٤$ قدم/ ث٢. أوجد سرعتها بعد ٥ ثوان ثم أوجد إزاحتها خلال هذه المدة.

٧ – ٢ إيجاد حجوم الأجسام الدورانية

إذا دارت منطقة مستوية دورة كاملة حول مستقيم ثابت في مستويها فإن الجسم الناشئ عن الدوران يسمى جسماً دورانياً، ويسمى المستقيم الثابت محور الدوران، والرسوم التالية بالشكل (٧ – ١٨) تبين بعض الأجسام الدورانية، وفيما يلي سنقدم طريقة حساب حجوم الأجسام الدورانية بواسطة التكامل المحدد، وسنستعين في ذلك بمعلومات الطالب عن حجم الأسطوانة الدائرية القائمة التي طول نصف قطر قاعدتها نق، وارتفاعها ع فيكون حجمها = ط نق^2 ع.



شكل (٧ – ١٨)

حجم الجسم الدوراني :

لتكن د دالة متصلة وغير سالبة في [أ، ب]. في الشكل (٧ – ١٩)، نفرض أن المنطقة الواقعة تحت د وفوق [أ، ب] قد دارت دورة كاملة حول المحور السيني، فولدت جسماً دورانياً محدداً من

الطرفين أ ، ب بدائرتين عموديتين على المحور السيني . إذا كان ح يساوي الحجم الحاصل من دوران المنطقة المحصورة بين منحني الدالة د (س) ومحور السينات والمستقيمين

س = أ ، س = ب

دورة كاملة حول محور السينات فإن هذا

الحجم يعطى بالقانون :

$$ح = ط \int_{أ}^{ب} [\,د(س)\,]^2 \, دس \qquad (٧ - ٧)$$

(البرهان غير مطلوب)

شكل (٧ - ١٩)

مثال (٧-١٤)

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المستوية الواقعة تحت المنحنى ص = د(س) = جتا س وفوق [٠ ، $\frac{ط}{٢}$] دورة كاملة حول محور السينات .

الحـــل :

$$ح = ط \int_{٠}^{\frac{ط}{٢}} ص^2 \, دس$$

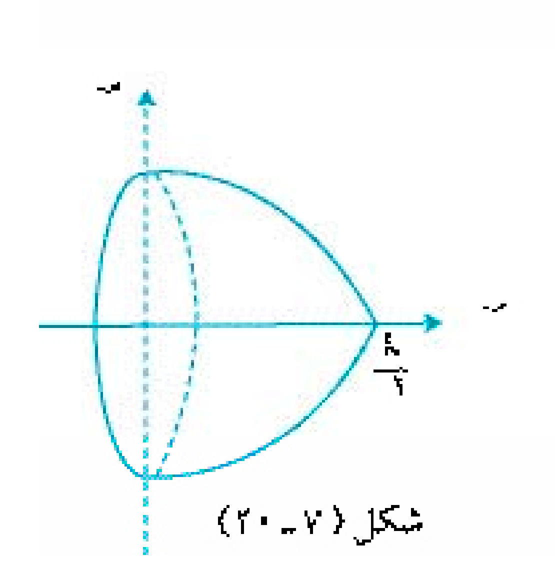
$$= ط \int_{٠}^{\frac{ط}{٢}} جتا^2 س \, دس$$

$$= \frac{١}{٢} ط \int_{٠}^{\frac{ط}{٢}} (١ + جتا ٢س) \, دس$$

$$= \frac{١}{٢} ط \left[س + \frac{١}{٢} جا٢س \right]_{٠}^{\frac{ط}{٢}}$$

$$= \frac{١}{٢} ط \left(\frac{ط}{٢} - صفر \right)$$

$$= \frac{١}{٤} ط^2 \text{ وحدة مكعبة}$$



شكل (٧ - ٢٠)

مثال (٧-١٥)

أوجد الحجم الناشئ من دوران المنطقة المحصورة بين المنحنيين ص^{٢} = س، ص = س^{٢} حول محور السينات

الحــل :

نوجد نقط تقاطع المنحنيين ص = $\sqrt{\text{س}}$ ، ص = س^{٢} ⟸ $\sqrt{\text{س}}$ = س^{٢}

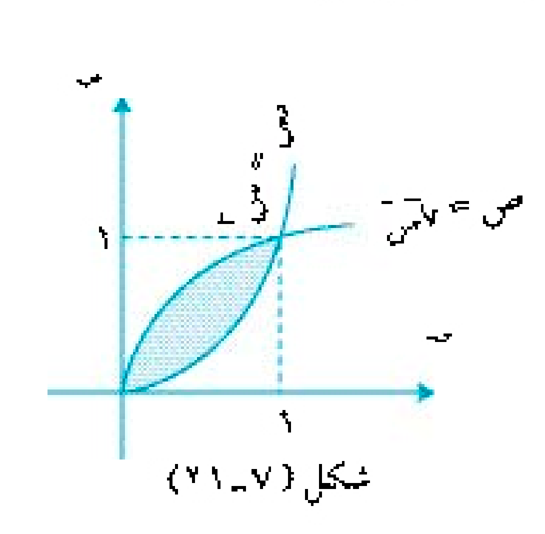
أي أن س = س^{٤} ⟸ س − س^{٤} = ٠

إذن س (س − ١) (س^{٢} + س + ١) = ٠

وبالتالي فإن س = ٠ أو س = ١

نقط تقاطع المنحنيين هي :

(٠ ، ٠) ، (١ ، ١) كما في الشكل (٧ ـ ٢١) .



شكل (٧ ـ ٢١)

الحجم المطلوب =

[الحجم الناشئ من دوران المنطقة الواقعة تحت منحنى الدالة

ص = $\sqrt{\text{س}}$ وفوق [٠ ، ١]] − [حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة الواقعة تحت

ص = س^{٢} وفوق [٠ ، ١]]

ح = ط $\int_{٠}^{١}$ س دس − ط $\int_{٠}^{١}$ س^{٤} دس

= ط $\left[\frac{١}{٢}\text{س}^{٢}\right]_{٠}^{١}$ − ط $\left[\frac{١}{٥}\text{س}^{٥}\right]_{٠}^{١}$

$= \frac{١}{٢} ط - \frac{١}{٥} ط$

$= \frac{٣}{١٠} ط$ وحدة مكعبة .

سنستفيد من القانون (٧ - ٧) لإيجاد حجوم بعض الأشكال الدورانية ، وذلك في الباب الثامن (الهندسة الفراغية) .

تمارين (٧ – ٣)

في كل مما يلي أوجد حجم الجسم المتولد من دوران المنطقة المحدودة بمنحنيات الدوال والمستقيمات المعطاة ، دورة كاملة حول المحور السيني :

(١) ص = ٣ − س ، س = ٠ ، س = ٣

(٢) ص = س + ٤ ، س = ٢ ، س = ٠

(٣) ص = س − س^{٢} ، س = ٠ ، س = ١

(٤) ص = س^{٢} + ٤ ، س = ٠ ، س = ٣

(٥) ص = ٤ − س^{٢} ، س = −٢ ، س = ٢

(٦) ص = ٢س − س^{٢} ، ص = ٠

(٧) ص = س^{٢} ، ص = ٤

(٨) ص = ٢ + س^{٢} ، ص = ٤

(٩) ص = س − س^{٢} ، ص = ٠

(١٠) س + ص = ٢ ، س = ٠ ، ص = ٠

(١١) ص = جاس ، ص = ٠ حيث ٠ ≤ س ≤ ط

(١٢) ص = ٣س − س^{٢} ، ص = س

(١٣) ص = س^{٢} ، ص = س

(١٤) ص = س^{٢} ، ص = ٨ − س^{٢}

(١٥) ص = $\sqrt{\text{س}}$ ، س = ٤ ، ص = ٠

(١٦) احسب حجم الجسم المتولد من دوران المنطقة المحصورة بين المنحنيين ص = ٨ س ، ص = س^{٢} حول محور السينات.

(١٧) أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة تحت المنحني ص = $\frac{١}{\text{س}}$ وفوق [١ ، ٢] دورة كاملة حول محور السينات.

(١٨) أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة الواقعة تحت منحني الدالة ص = جتا س وفوق [$-\frac{\pi}{٢}$ ، ٠] دورة كاملة حول محور السينات.

٧ – ٣ مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية وتكاملها

سبق لك، في الصف الأول الثانوي، دراسة كل من الأسس واللوغاريتمات وخواصها، كما تعرفت على كل من الدالة الأسية، والدالة اللوغاريتمية، ورسمت بيان كل منهما، وقد قمنا بمراجعة لها من خلال التعريفين (٣ – ٢)، (٣ – ٣) والأشكال (٣ – ١٦)، (٣ – ١٧)، (٣ – ١٨) من الجزء الأول من هذا الكتاب وقد رأيت أنه إذا كان $أ \in ح^{+} - \{١\}$ فإن:

$ص = لو_{أ}\, س \iff س = أ^{ص}$ وهي العلاقة (٣ – ٦) من الباب الثالث من الجزء الأول آنف الذكر.

من بين الدوال الأسية واللوغاريتمية هناك حالة ذات أهمية بالغة بالنسبة للتطبيقات، هي تلك التي أساسها العدد e وهو العدد الحقيقي غير النسبي :

$$e = \sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{١}{ن!}$$

يبرهن أن : $e = \lim_{س \to \infty} \left(١ + \frac{١}{س}\right)^{س}$ (٧ – ٨)

الشكل (٣ – ١٨) الذي سبق لك التعرف عليه في الباب الثالث يمثل بيان الدالة $ص = لو_{e}\, س$.

إذا لم يكن هناك لبس فإن ($لو_{e}\, س$) نكتبها (لو س) وإلا فإننا نثبت e في موضعها.

تدريب (٧-٤)

تذكّر قواعد اللوغاريتمات ثم اكتب ما تساويه كل من العبارات الآتية :

(١) لو ١ = (٢) لو (ا . ب . حـ)

(٣) لو ا^{ن} = (٤) لو e = (٥) لو$_{e}$ س =

(٦) لو $\sqrt[ن]{س^{م}}$ = (٧) لو $\frac{ا}{ب}$ =

(٨) لو (ا ÷ ب) = (٩) لو ا + لو ب =

مثال (٧-١٨)

أثبت أنّ لو ص = لو س × لو ا ا > ٠ ، ا ≠ ١

البرهان :

بفرض ص = لو س ⟺ س = ا^{ص} (١) حسب تعريف اللوغاريتم

لو ا = لو$_{e}$ ا = ب ⟺ ا = e^{ب} (٢) حسب تعريف اللوغاريتم

من (١) ، (٢) ⟸ س = (e^{ب})^{ص}

∴ س = e$^{ص ب}$

⟸ لو$_{e}$ س = ص . ب وبالرجوع إلى الفرض :

⟸ لو س = لو$_{e}$ س × لو ا (٧ - ٩)

يمكن أن نستنتج من (٧ - ٩) :

$$\text{لو}_{أ}\,\text{س} = \text{لو س} \div \text{لو أ} \qquad (٧ - ١٠)$$

مشتقة الدالة اللوغاريتمية :

> **نظرية (٧ − ١)**
>
> إذا كانت $\text{ص} = \text{لو س}$ فإنَّ : $\dfrac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \dfrac{١}{\text{س}}$ ، س > ٠ $\qquad (٧ - ١١)$

البـرهـــان : غير مطلوب

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{نها}_{\Delta \text{س} \to ٠} \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} \qquad \text{ونفرض } \Delta \text{س} = \text{هـ}$$

$$\Delta \text{ص} = \text{د (س + هـ)} - \text{د (س)} = \text{لو (س + هـ)} - \text{لو س}$$

$$= \text{لو} \frac{\text{س + هـ}}{\text{س}} \qquad \text{(لماذا؟)}$$

$$= \text{لو} \left(١ + \frac{\text{هـ}}{\text{س}}\right)$$

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{١}{\text{هـ}} \text{ لو} \left(١ + \frac{\text{هـ}}{\text{س}}\right)$$

$$= \frac{١}{\text{س}} \cdot \frac{\text{س}}{\text{هـ}} \text{ لو} \left(١ + \frac{\text{هـ}}{\text{س}}\right) \qquad \text{(لماذا؟)}$$

$$= \frac{١}{\text{س}} \text{ لو} \left(١ + \frac{\text{هـ}}{\text{س}}\right)^{\frac{\text{س}}{\text{هـ}}} \qquad \text{(لماذا؟)}$$

لنفرض أنَّ : $\dfrac{\text{س}}{\text{هـ}} = \text{ع} \quad \Leftarrow \quad \dfrac{\text{هـ}}{\text{س}} = \dfrac{١}{\text{ع}}$ ، وبملاحظة أنَّ :

$\text{هـ} \to ٠ \quad \Leftarrow \quad \text{ع} \to \infty$ نجد :

$$\frac{دص}{دس} = \lim_{هـ \to 0} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ} = \lim_{ع \to \infty} \frac{1}{س} لو \left(1 + \frac{1}{ع}\right)^{ع}$$

$$= \frac{1}{س} \times \lim_{ع \to \infty} لو \left(1 + \frac{1}{ع}\right)^{ع} = \frac{1}{س} \times لو \left(\lim_{ع \to \infty} \left(1 + \frac{1}{ع}\right)^{ع}\right)$$

$$= \frac{1}{س} \times لو هـ = \frac{1}{س} \quad \text{(لماذا ؟)}$$

نتائج (٧ – ٢) :

(١) بتطبيق قاعدة التسلسل :

$$\frac{د}{دس} لو \left(د(س)\right) = \frac{1}{د(س)} \times د'(س) = \frac{د'(س)}{د(س)} \qquad (٧ - ١٢)$$

(٢) إذا كان $ص = لو_{ب} س$ فإن :

$$\frac{دص}{دس} = \frac{1}{س \cdot لو_{هـ} ب} \qquad (٧ - ١٣)$$

(البرهان متروك للطالب – استخدم (٧ - ١٠))

(٣) إذا كان $ص = لو_{ب} د(س)$ فإن

$$\frac{دص}{دس} = \frac{د'(س)}{د(س) \cdot لو_{هـ} ب} \qquad \text{(لماذا ؟)}$$

(٤) إذا كان $ص = لو |س|$ ، $س \neq 0$ ،

أ) إذا كان $س > 0$ ، فإن $|س| = س$ ، ويكون $ص = لو س$ ومنه $ص' = \frac{1}{س}$

ب) إذا كان $س < 0$ ، فإن $|س| = -س$ ، ويكون $ص = لو (-س)$

$$\Leftarrow ص' = \frac{(-س)'}{-س} = \frac{-1}{-س} = \frac{1}{س}$$

مثال (٧-١٩)

أوجد مشتقات الدوال الآتية :

(أ) $د(س) = لو\,(س^{٢} + ٦)$ (ب) $د(س) = لو\,\sqrt{س + ١}$ ، $س > -١$

(جـ) $د(س) = لو\,[\sqrt{٦س - ١}\,(٤س + ٥)^{٣}]$ (د) $د(س) = لو_{٣}\,|٦س - ٧|$

الحـــل :

(أ) $د'(س) = \frac{١}{س^{٢} + ٦} \times ٢س = \frac{٢س}{س^{٢} + ٦}$

(ب) $د(س) = لو\,\sqrt{س - ١} = لو\,(س + ١)^{\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٢}\,لو\,(س + ١)$

$د'(س) = \frac{١}{٢} \times \frac{١}{س + ١} = \frac{١}{٢(س + ١)}$

(جـ) $د(س) = لو\,(\sqrt{٦س - ١}\,(٤س + ٥)^{٣})$

$= لو\,\sqrt{٦س - ١} + لو\,(٤س + ٥)^{٣}$

$= \frac{١}{٢}\,لو\,(٦س - ١) + ٣\,لو\,(٤س + ٥)$

$د'(س) = \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٦س - ١} \times ٦ + ٣ \times \frac{١}{٤س + ٥} \times ٤$

$= \frac{٣}{(٦س - ١)} + \frac{١٢}{(٤س + ٥)} = \frac{٨٤س + ٣}{(٦س - ١)(٤س + ٥)}$

(د) $د'(س) = \frac{١}{(٦س - ٧)\,لو\,٣} \times (٦س - ٧)' = \frac{٦}{(٦س - ٧)\,لو\,٣}$

تدريب (٧-٥)

(١) أوجد مجال الدالة د(س) في الفقرة (جـ) من المثال (٧ - ١٩) السابق.

(٢) وازن بين مجالي الدالتين $ص = لو\,س^{٢}$ ، $ص = ٢\,لو\,س$

(٣) أوجد المجال لكل من الدوال الآتية ثم أوجد المشتقة :

(أ) د(س) = لو $\sqrt{\text{[illegible]}}$ (ب) د(س) = لو جتا (٢س)

(جـ) د(س) = لو |س – ٥| (د) د(س) = لوه (٣س^{٢} + ٢)^{٣}

(٤) أوجد مشتقة الدالة هـ(س) = لوه (٣س^{٢} + ٢)^{٣}

مشتقة الدالة الأسية :

نظرية (٧ – ٢)

إذا كانت ص = $e^{\text{س}}$ فإنَّ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = e^{\text{س}}$ (٧ – ١٤)

البرهــــان :

إذا كانت ص = $e^{\text{س}}$ ، س ∈ ح ، ص ∈ ح$^{+}$

فإنَّ : لوه ص = س حسب تعريف اللوغاريتم

∴ $\frac{\text{ص}'}{\text{ص}}$ = ١ حسب (٧ – ١٢)

∴ ص' = ص

∴ ص' = $e^{\text{س}}$

نتيجة (٧ – ٣) :

حسب قاعدة التسلسل : إذا كانت ص = $e^{\text{د(س)}}$ فإنَّ ص' = د'(س) $e^{\text{د(س)}}$ (٧ – ١٥)

مثال (٧-٢٠)

احسب $\frac{دص}{دس}$ في كلٍّ من الحالات الآتية :

(أ) $ص = هـ^{س^{٣}}$ (ب) $ص = س^{٣} \times هـ^{س^{٢}}$

(جـ) $ص = هـ^{جا ٢س}$ (د) $ص = هـ^{س لو س}$

الحـــل :

(أ) $\frac{دص}{دس} = هـ^{س^{٣}} \times (س^{٣})' = ٣ س^{٢} هـ^{س^{٣}}$

(ب) $\frac{دص}{دس} = (س^{٣})' \times هـ^{س^{٢}} + (هـ^{س^{٢}})' \times س^{٣}$

$= ٣ س^{٢} \times هـ^{س^{٢}} + ٢ س \times هـ^{س^{٢}} \times س^{٣} = س^{٢} هـ^{س^{٢}} (٣ + ٢ س^{٢})$

(جـ) $\frac{دص}{دس} = هـ^{جا ٢س} \times (جا ٢س)' = ٢ هـ^{جا ٢س} جتا ٢س$

(د) $\frac{دص}{دس} = هـ^{س لو س} \times (س لو س)' = هـ^{س لو س} (١ لو س + \frac{١}{س} \times س)$

$= هـ^{س لو س} (١ + لو س)$.

نتائج (٧ – ٤) :

(١) لكل $س \in ح^{+}$ فإن $س = هـ^{لو س}$ (٧-١٦)

البرهان : يفرض $ص = هـ^{لو س}$ (١)

$\therefore$ لو ص = لو س حسب تعريف اللوغاريتم

وبما أن الدالة اللوغاريتمية تقابل ،

إذن $\quad$ ص = س $\qquad\qquad$ (٢)

من (١) ، (٢) نجد س = $e^{\text{لو س}}$

(٢) إذا كانت ص = $أ^{س}$ فإن $\frac{دص}{دس} = أ^{س} \,.\, \text{لو أ}$

البرهان: من تعريف اللوغاريتم فإن:

لو ص = س

⟸ لو ص ÷ لو أ = س $\qquad\qquad$ حسب (٧ – ١٠)

⟸ لو ص = س . لو أ $\qquad\qquad$ وباشتقاق الطرفين:

⟸ $\frac{صَ}{ص}$ = لو أ $\quad$ ⟸ $\quad$ صَ = ص لو أ = $أ^{س}$. لو أ

(٣) $أ^{س} = e^{\text{س لو أ}}$ $\qquad\qquad$ (أثبت) $\qquad\qquad$ (٧ – ١٧)

نتيجة (٧ – ٥) :

إذا كانت ص = $أ^{د(س)}$ فإن $\frac{دص}{دس} = أ^{د(س)} \,.\, دَ(س) \,.\, \text{لو أ}$

تدريب (٧–٦)

(١) تذكّر قواعد الأسس وأكمل العبارات الآتية:

(أ) [illegible] = $\qquad$ (ب) [illegible] = $\qquad$ (ج) [illegible] =

(د) [illegible] = $\qquad$ (هـ) [illegible] = $\qquad$ (و) [illegible] =

(ز) $e \times e$ [illegible] = $\qquad$ (ح) [illegible] =

(٢) أوجد دَ(س) لكل مما يأتي :

(أ) د(س) = $e^{-س} + \sqrt{e^{-س}}$ (ب) د(س) = لو ($e^{-س}$)

(ج) د(س) = جا ($e^{س}$)

مثال (٧-٢١)

إذا كانت ص = $e^{-س}$ فأوجد ص + صَ + صً

الحل :

صَ = $-e^{-س}$ ، صً = $-(-e^{-س}) = e^{-س}$

$\Leftarrow$ ص + صَ + صً = $e^{-س} - e^{-س} + e^{-س} = e^{-س}$ = ص.

تمارين (٧ – ٤)

١ – في التمارين من (١) إلى (١٩) أوجد الدالة المشتقة :

(١) ص = س^{٢} + لو س   (٢) ص = جتا س + لو س

(٣) ص = س^{٢} لو س   (٤) ص = (س + ٣) لو س

(٥) ص = لو س^{٢} (٦) ص = لو (س^{٢} + ٢ س)

(٧) ص = لو (س^{٢} − ٢ س + ٥)   (٨) ص = لو (لو س)

(٩) ص = س^{٢} لو س^{٢} (١٠) ص = (س^{٢} + ٣ س) لو (س^{٢} + ٢ س)

(١١) ص = لو (٥ س^{٢} + ١)^{٣} (١٢) ص = لو $\sqrt[٣]{٦ س + ٧}$

(١٣) ص = لو س^{٣} + (لو س)^{٣} (١٤) ص = لو $\sqrt{\frac{س + ٤}{س - ٤}}$

(١٥) ص = $\frac{١}{لو س}$ + لو $\frac{١}{س}$ (١٦) ص = لو ظا ٢ س

(١٧) ص = لو (ظتا س^{٢})   (١٨) ص = جتا (لو ٢ س)

(١٩) ص = لو (لو قا ٢ س)

٢ – في التمارين من (١) إلى (٢٣) أوجد الدالة المشتقة :

(١) $e^{٢س}$ (٢) س . $e^{س}$ (٣) $e^{س^{٢}}$

(٤) س^{٢} . $e^{٣س}$ (٥) $e^{س}$ جاس   (٦) جا $e^{س}$

(٧) $e^{س}$ جتاس   (٨) $e^{ص س}$ ، س ≠ ٠ ، ص ∈ ح

(٩) جا س . $e^{\text{جتا س}}$ (١٠) $\sqrt{e^{2س}+e^{-2س}}$ (١١) $e^{\sqrt{2س+1}}$ ، $س > -\frac{1}{2}$

(١٢) $2^{س}$ (١٣) $10^{س}$ (١٤) $\frac{1}{2}\left(e^{س}-e^{-س}\right)$

(١٥) $\frac{1}{2}\left(e^{س}+e^{-س}\right)$ (١٦) $أ\,e^{ب س} - جـ\,e^{د س}$ (١٧) $س^{5}$ لو $(س^{2}+1)+4س$

(١٨) $9^{\text{جا س}}$ (١٩) $8^{س^{2}+1}$ (٢٠) لو $(س^{2}+3س+1)$

(٢١) $\text{لو}_e \sqrt{س^{2}+2}$ (٢٢) $\text{لو}_e \sqrt[3]{(2س+5)^{2}}$

(٢٣) إذا كانت $ص = e^{ن س}$ فالمطلوب :

(أ) أثبت أنّ $\frac{دص}{دس} = ن ص$.

(ب) أوجد قيمة ن التي تحقق المعادلة :

$$\frac{د^{2}ص}{دس^{2}} + \frac{دص}{دس} - 6ص = 0$$

الدالة الأصلية للدالة الأسية :

(١) وجدت أنَّ مشتقة الدالة $ص = e^{س}$ المعرّفة على ح هي الدالة $ص' = e^{س}$ المعرّفة على ح أيضاً .

فلإيجاد الدالة الأصلية للدالة $ص = e^{س}$ ، نبحث عن دالة ع مشتقتها هي الدالة $ص = e^{س}$ فنجد أنها $ع = e^{س} + ث$ ، حيث ث عدد ثابت حقيقي ، لأنَّ $ع' = (e^{س} + ث)' = e^{س} = ص$

ونكتب : $\int e^{س}\,دس = e^{س} + ث$ (٧ − ١٨)

(٢) بما أن $\frac{د}{دس}\left(e^{د(س)}\right) = د'(س) \times e^{د(س)}$ حسب (٧ − ١٥)

يكون $\int e^{\text{د}(\text{س})}\,\text{د}'(\text{س})\,\text{دس} = e^{\text{د}(\text{س})} + \text{ث}$ (٧ - ١٩)

وبصورة خاصة $\int e^{\text{أس}}\,\text{دس} = \frac{1}{\text{أ}} \times e^{\text{أس}} + \text{ث}$ ، (لماذا؟) (٧ - ٢٠)

مثال (٧-٢٢)

أوجد $\int (e^{2\text{س}} + e^{-2\text{س}})\,\text{دس}$

الحــل :

من (٧ - ١٥)، $\int (e^{2\text{س}} + e^{-2\text{س}})\,\text{دس} = \frac{1}{2}(e^{2\text{س}}) - \frac{1}{2}(e^{-2\text{س}}) + \text{ث}$

$= \frac{1}{2}(e^{2\text{س}} - e^{-2\text{س}}) + \text{ث}$

مثال (٧-٢٣)

احسب التكاملين :

(أ) $\int_{0}^{2} e^{\text{لو}_e(\text{س}+2)}\,\text{دس}$ (ب) $\int_{1}^{4} e^{2\,\text{لو}_e \text{س}}\,\text{دس}$

الحــل :

(أ) $e^{\text{لو}_e(\text{س}+2)} = (\text{س} + 2)$ من (٧ - ١٦)

إذن $\int_{0}^{2} e^{\text{لو}_e(\text{س}+2)}\,\text{دس} = \int_{0}^{2} (\text{س} + 2)\,\text{دس}$

$= [\frac{1}{2}\text{س}^2 + 2\text{س}]_{0}^{2} = 6$

(ب) $e^{2\,\text{لو}_e \text{س}} = e^{\text{لو}_e \text{س}^2} = \text{س}^2$ (لماذا؟)

إذن $\int_{1}^{4} e^{2\,\text{لو}_e \text{س}}\,\text{دس} = \int_{1}^{4} \text{س}^2\,\text{دس} = [\frac{1}{3}\text{س}^3]_{1}^{4} = 21$

مثال (٧-٢٤)

احسب $\int (1 + e^{-3\text{س}})\, d\text{س}$

الحـــل :

$$\int (1 + e^{-3\text{س}})\, d\text{س} = \int d\text{س} + \int e^{-3\text{س}}\, d\text{س}$$

$$= \text{س} + \frac{1}{-3} \times e^{-3\text{س}} + \text{ث}$$

$$= \text{س} - \frac{1}{3}\, e^{-3\text{س}} + \text{ث}$$

مثال (٧-٢٥)

أوجد : $\int_{1}^{2} e^{-4\text{س}}\, d\text{س}$

الحـــل :

$$\int_{1}^{2} e^{-4\text{س}}\, d\text{س} = \left[-\frac{1}{4}\, e^{-4\text{س}} \right]_{1}^{2}$$

$$= -\frac{1}{4} \left(e^{-8} - e^{-4} \right)$$

مثال (٧-٢٦)

أوجد :

(أ) $\int 2^{3\text{س}}\, d\text{س}$ (ب) $\int 10^{-2\text{س}}\, d\text{س}$ (جـ) $\int 5^{-5\text{س}}\, d\text{س}$

الحـــل :

(أ) من النتائج (٧ – ٢) الفقرة (٢) ، (٣)

$$\text{٢}^{\text{س}} = \text{هـ}^{\text{لو٢}^{\text{س}}} = \text{هـ}^{\text{س لو٢}}$$

$$\int \text{٢}^{\text{س}} \cdot \text{دس} = \int \text{هـ}^{\text{س لو٢}} \cdot \text{دس} = \frac{\text{١}}{\text{لو٢}} \int \text{هـ}^{\text{س لو٢}} \times \text{لو٢} \times \text{دس}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{لو٢}} \times \text{هـ}^{\text{س لو٢}} + \text{ث}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{لو٢}} \times \text{٢}^{\text{س}} + \text{ث} = \frac{\text{٢}^{\text{س}}}{\text{لو٢}} + \text{ث}$$

(ب)

حساب $\int \text{١٠}^{\text{٢س}} \text{دس}$

نفرض ٢س = ص بحيث ٢ دس = دص $\Leftarrow$ دس = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ دص

إذن $\int \text{١٠}^{\text{٢س}} \text{دس} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} \int \text{١٠}^{\text{ص}} \cdot \text{دص} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} \times \frac{\text{١٠}^{\text{ص}}}{\text{لو١٠}} + \text{ث}$

$$= \frac{\text{١٠}^{\text{٢س}}}{\text{٢ لو١٠}} + \text{ث}$$

(جـ) بالطريقة التي سلكناها في (ب) :

$$\int \text{٥}^{-\text{س}} \cdot \text{دس} = -\frac{\text{٥}^{-\text{س}}}{\text{لو٥}} + \text{ث}$$

نتيجة (٧ – ٦) :

$$\int \text{أ}^{\text{س}} \text{دس} = \frac{\text{أ}^{\text{س}}}{\text{لوأ}} + \text{ث} \qquad (\text{٧ – ٢١})$$

$$\int \text{أ}^{\text{م س + ن}} \text{دس} = \frac{\text{أ}^{\text{م س + ن}}}{\text{م لوأ}} + \text{ث} \qquad (\text{٧ – ٢٢})$$

الدالة الأصلية للدالة من الشكل $ص = \frac{أس + ب}{حـ س + د}$

مع $حـ \neq ٠$ ، $أد - حـ ب \neq ٠$

(١) رأيت من قبل أن مشتق الدالة $ص = لو|س|$ ، $س \in ح^*$

$$ص' = \frac{١}{س}$$

وعلى هذا فإنَّ $\int \frac{١}{س} دس = لو|س| + ث$ (٧ − ٢٣)

(٢) وبالقياس إلى ذلك فإنَّ :

$$\int \frac{١}{س + د} دس = لو|س + د| + ث$$

وبفرض $حـ \neq ٠$ فإنَّ :

$$\int \frac{١}{حـ س + د} دس = \frac{١}{حـ} لو|حـ س + د| + ث$$

$$\int \frac{أ}{حـ س + د} دس = أ \int \frac{١}{حـ س + د} دس$$

وبالتالي $\int \frac{أ}{حـ س + د} دس = \frac{أ}{حـ} لو|حـ س + د| + ث$ (٧ − ٢٤)

مثال (٧–٢٧)

أوجد :

(أ) $\int \frac{٣}{٣س + ٥} دس$ (ب) $\int \frac{٥س + ٣}{س - ٢} دس$

الحـــل :

(أ) $\int \frac{3}{3س+5} \, دس = لو|3س+5| + ث$

(ب) بقسمة بسط الكسر على مقامه نجد :

$$\frac{5س+3}{س-2} = 5 + \frac{13}{س-2}$$

وعليه : $\int \frac{5س+3}{س-2} \, دس = \int 5 \, دس + \int \frac{13}{س-2} \, دس$

$= 5س + 13 لو|س-2| + ث$

نتيجة (٧ - ٧) :

بما أنّ مشتقة الدالة ص = لو|د(س)| هي ص' = $\frac{د'(س)}{د(س)}$

فإنّ $\int \frac{د'(س)}{د(س)} \, دس = لو|د(س)| + ث$ (٧ - ٢٥)

مثال (٧-٢٨)

أوجد $\int \frac{جتا 3س}{5+جا 3س} \, دس$

الحـــل :

بفرض ٥ + جا٣س = د(س) ⟸ (٥ + جا ٣س)' = ٣ جتا ٣س

وعليه فإن الدالة $\frac{جتا 3س}{5+جا 3س}$ من الشكل $\frac{د'(س)}{د(س)}$

أي أنّ $\int \frac{جتا 3س}{5+جا 3س} \, دس = \frac{1}{3} لو|5 + جا 3س| + ث$

مثال (٧-٢٩)

أوجد $\int_{1}^{2} \frac{3}{س} \, دس$

الحـــل :

$$\int_{1}^{2} \frac{3}{س} \, دس = 3 \left[لو |س| \right]_{1}^{2} = 3 \left[لو 2 - لو 1 \right] = 3 \, لو 2$$

ويمكن الحصول على قيمة عددية (مقربة) لهذا الناتج بالاستعانة بجداول اللوغاريتمات الطبيعية أو الآلة الحاسبة فنحصل على $لو 2 \approx 0{,}69315 \Leftarrow 3 \, لو 2 = 2{,}07945$

مثال (٧-٣٠)

احسب $\int_{1}^{3} \frac{دس}{س - 4}$

الحـــل :

نلاحظ أن

$$\frac{د}{دس} (س - 4) = 1$$

إذن

$$\int_{1}^{3} \frac{دس}{س - 4} = \left[لو |س - 4| \right]_{1}^{3} \quad \text{نتيجة (٧ − ٢٣)}$$

$$= لو |-1| - لو |-3|$$

$$= لو 1 - لو 3$$

$$= - لو 3$$

شكل (٧ − ٢٢)

تتفق هذه النتيجة مع التفسير الهندسي للتكامل المحدد كمساحة إذن نتيجة هذا التكامل = − المساحة المظللة في الشكل (٧ − ٢٢).

مثال (٧-٣١)

احسب $\int_{1}^{2} \frac{2\text{س} - 5}{\text{س}^2 - 5\text{س} + 8}\, d\text{س}$

الحـــل :

نفرض $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^2 - 5\text{س} + 8 \Leftarrow \text{دَ}(\text{س}) = 2\text{س} - 5$

إذن $\int_{1}^{2} \frac{2\text{س} - 5}{\text{س}^2 - 5\text{س} + 8}\, d\text{س}$

$= \left[\text{لو}\,|\text{س}^2 - 5\text{س} + 8|\right]_{1}^{2}$ من (٧ – ٢٥)

$= \text{لو}\,2 - \text{لو}\,4 = \text{لو}\,2 - \text{لو}(2)^2$

$= \text{لو}\,2 - 2\,\text{لو}\,2 = -\,\text{لو}\,2$

مثال (٧-٣٢)

احسب $\int_{0}^{\frac{\text{ط}}{2}} \frac{2\text{س} - \text{جاس}}{\text{س}^2 + \text{جتاس}}\, d\text{س}$

الحـــل :

$\frac{d}{d\text{س}}(\text{س}^2 + \text{جتا س}) = 2\text{س} - \text{جا س}$

إذن

$\int_{0}^{\frac{\text{ط}}{2}} \frac{2\text{س} - \text{جاس}}{\text{س}^2 + \text{جتاس}}\, d\text{س} = \left[\text{لو}\,|\text{س}^2 + \text{جتا س}|\right]_{0}^{\frac{\text{ط}}{2}}$

$= \text{لو}\left(\frac{\text{ط}}{2}\right)^2 - \text{لو}\,1$

$= 2\,\text{لو}\,\frac{\text{ط}}{2}$

$= 2\,\text{لو}\,\text{ط} - 2\,\text{لو}\,2$

مثال (٧-٣٣)

أوجد مساحة المنطقة الواقعة تحت المنحنى ص = $e^{\text{٤س}}$ وفوق [١ ، ٣]

الحــل :

لكل س ∈ ح فإن $e^{\text{٤س}} > \text{٠}$ ، وبالتالي فإن المنحني يقع فوق محور السينات والمنطقة المطلوب حساب مساحتها فوق محور السينات ، وبالتالي المساحة المطلوبة

$$= \int_{\text{١}}^{\text{٣}} e^{\text{٤س}} \, \text{دس} = \left[\frac{\text{١}}{\text{٤}} e^{\text{٤س}} \right]_{\text{١}}^{\text{٣}}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٤}} \left[e^{\text{٤س}} \right]_{\text{١}}^{\text{٣}} = \frac{\text{١}}{\text{٤}} \left(e^{\text{١٢}} - e^{\text{٤}} \right)$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٤}} e^{\text{٤}} \left(e^{\text{٨}} - \text{١} \right)$$ وحدة مساحة

تمارين (٧ – ٥)

في كل مما يلي أوجد دالة أصلية لكل من الدوال المذكورة :

(١) $\frac{٤}{س}$ ، س > ٠ (٢) $\frac{٢}{٢س + ٣}$ ، ٢س + ٣ > ٠

(٣) $\frac{٢س}{س^{٢} + ١}$ (٤) $\frac{١}{س \, لو س}$ ، س > ٠

(٥) $\frac{٢س + ٣}{س^{٢} + ٣س + ٤}$ (٦) $\frac{٢س - ١}{س^{٢} - س + ٥}$

احسب التكاملات الآتية :

(٧) $\int_{٠}^{١} \frac{٣}{٢س + ٣} \, دس$ (٨) $\int_{٠}^{١} \frac{ص}{ص^{٢} + ١} \, دص$

(٩) $\int_{٢}^{٣} \frac{دس}{س - ٥}$ (١٠) $\int_{٠}^{٢} \frac{٣س^{٢} + ٢}{س^{٣} + ٢س + ٣} \, دس$

(١١) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{١ - جاس}{س + جتاس} \, دس$ (١٢) $\int^{\frac{\pi}{٢}} \frac{٢س \, (١ + جاس^{٢})}{س^{٢} - جتاس^{٢}} \, دس$

(١٣) $\int_{٠}^{١} \frac{٢س + ٥}{(س + ٢)(س + ٣)} \, دس$

(١٤) إذا كانت $ص = ٣^{-١} س^{٢}$ فأوجد :

(أ) $\frac{دص}{دس}$ ، (ب) $\int ص \, دس$

في التمارين من (١٥) إلى (١٨) أوجد دالة أصلية مقابلة للدوال المذكورة :

(١٥) $e^{\text{٤س}}$ (١٦) $\text{أ}\, e^{\text{٥س}} + \text{ب}\, e^{\text{٤س}}$ (١٧) $\text{٣}^{\text{س}}$

(١٨) $\dfrac{e^{\text{س}}}{e^{\text{س}} - \text{٥}}$ ، $e^{\text{س}} \neq \text{٥}$

احسب التكاملات التالية :

(١٩) $\int (\text{أ}\, e^{\text{٣س}} + \text{ب}\, e^{\text{س}})\, \text{ءس}$

(٢٠) $\int_{\text{٠}}^{\text{١}} \dfrac{e^{\text{س}}}{e^{\text{س}} + \text{٣}}\, \text{ءس}$

(٢١) $\int_{\text{١}}^{\text{٢}} \text{٣}^{\text{س}}\, \text{ءس}$ (٢٢) $\int_{\text{١}}^{\text{٢}} \text{٥}^{\text{س}}\, \text{ءس}$

(٢٣) $\int \text{٥}^{-\text{٢س}}\, \text{ءس}$ (٢٤) $\int \text{١٠}^{\text{٣س}}\, \text{ءس}$

(٢٥) $\int \text{س} \times \text{٣}^{\text{س}^{\text{٢}}}\, \text{ءس}$ (٢٦) $\int \dfrac{\text{٥ لوس}}{\text{س}}\, \text{ءس}$

(٢٧) أوجد مساحة المنطقة الواقعة تحت المنحنى ص = $\text{٢}^{\text{س}}$ وفوق [٢ ، ٥]

تمارين عامة

احسب المساحة المحدودة بالمنحنيات الآتية :

(١) ص = $\sqrt{\text{س}}$ ، ص = – س ، س = ١ ، س = ٤

(٢) ص = س^{2} + ١ ، ص = ٥

(٣) ص = س^{2} ، ص = ٤ س

(٤) ص = س ، ص = ٣ س ، س + ص = ٤

(٥) أوجد المساحة المحصورة بين منحني الدالة ص = (س + ٢)^{2}

والمستقيمين س = –٢ ، س = ١

(٦) احسب المساحة المحصورة بالدالتين ص = ٦ – ٣ س^{2} ، ص = ٣ س

في الفترة [٠ ، ٢]

أحسب الحجم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات المعطاة حول محور السينات.

(٧) ص = $\frac{1}{\text{س}}$ ، س = ١ ، س = ٣ ، ص = ٠

(٨) ص = $\sqrt{\text{س}}$ ، ص = ٠ ، س = ٤

(٩) ص = س^{2} ، ص = ٤ – س^{2}

(١٠) ص = ٢ س ، ص = ٤ س – س^{2}

(١١) $\frac{س^2}{أ^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = ١$

أوجد مشتقة الدوال الآتية :

(١٢) $ص = س^{٣س}$ (١٣) $ص = (١ + هـ^{-س})^{-١}$ (١٤) $ص = ٢^{جاس}$

(١٥) $ص = ط^{س}$ (١٦) $ص = لو_{هـ} \left| \frac{٣س + ٤}{٢س - ٣} \right|$

احسب التكاملات الآتية :

(١٧) $\int_{٠}^{١} \frac{س + ٢}{س - ٢}$

(١٨) $\int_{٠}^{١} \frac{س دس}{س^2 + ٢}$

(١٩) $\int_{٠}^{\frac{ط}{٢}} \frac{جتاس}{٣ + جاس} دس$

(٢٠) $\int_{٠}^{٢} هـ^{لو(س + ٣)} دس$

(٢١) إذا كانت $ص = ٢^{س} + هـ^{-س}$ فأوجد : (أ) $\frac{دص}{دس}$

(ب) $\int_{٠}^{٢} ص دس$

(٢٢) $\int \frac{٢س}{س^{٢} + ١}$ ءس

(٢٣) $\int \frac{(س^{٢} + ١)^{٢}}{س^{٢}}$ ءس

(٢٤) $\int \frac{١}{س \text{ لو } س}$ ءس

(٢٥) $\int \frac{هـ^{س} - هـ^{-س}}{هـ^{س} + هـ^{-س}}$ ءس

(٢٦) ب جـ ء مثلث فيه |ب ء| = ٤ سم ، |جـ ب| = ٢ سم ، |جـ ء| = ٢ $\sqrt{٣}$ سم

نرسم الدائرتين (ب ، ٤ سم) ، (جـ ، ٢ $\sqrt{٣}$ سم) ، ثم نرسم من ء مستقيماً متحولاً لا يخترق سطح المثلث ب جـ ء فيقطع الدائرة الأولى في ط والثانية في ط′ وليكن س قياس الزاوية ب ء̂ ط ، والمطلوب:

(أ) عيّن س ليكون |ط ط′| = ٢ $\sqrt{٣}$ سم .

(ب) بفرض م ، م′ المسقطين القائمين لـ ب ، جـ على ط ط′ بالترتيب ، عيّن س لكي تكون مساحة شبه المنحرف ب م م′ جـ أعظم ما يمكن .

(جـ) إذا كانت الدالة ص = د(س) تمثل مساحة شبه المنحرف المذكور فارسم المنحنى البياني الممثل لهذه الدالة (مع تفسير الخطوات) .

(ء) احسب السطح المغلق المحصور بين المنحنى الذي رسمته ومحور السينات ومحور الصادات والمستقيم : س = $\frac{ط}{٢}$

الباب الثامن

الهندسة الفراغية (٢)

٨ - ١ كثيرات الوجوه ، المنشور.

٨ ـ ٢ مسلمات الحجم ، حجم المنشور.

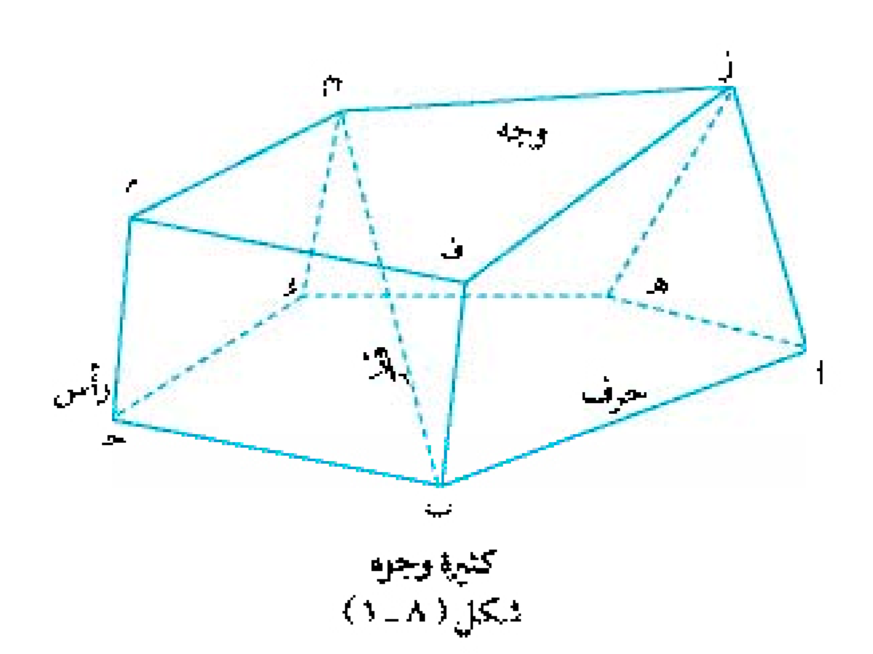
٨ - ٣ الهرم .

٨ - ٤ الأسطوانة والمخروط.

٨ - ٥ الكرة .

٨ - ١ كثيرات الوجوه ، المنشور

يسمّى أيّ حيّز في الفراغ محدود بسطح أو عدّة سطوح مجسّماً ويسمّى المجسّم كثير وجوه إذا كانت كل السطوح التي تحدّه مستوية وفي هذه الحالة تسمّى هذه المستويات وجوهاً والمستقيمات التي تتقاطع فيها أحرفاً. أمّا نقاط تقاطع الأحرف فتسمّى الرؤوس . أيّ قطعة مستقيمة تصل بين رأسين في وجهين مختلفين تسمّى قطراً.



كثيرة وجوه
شكل (٨ ـ ١)

تدريب (٨-١)

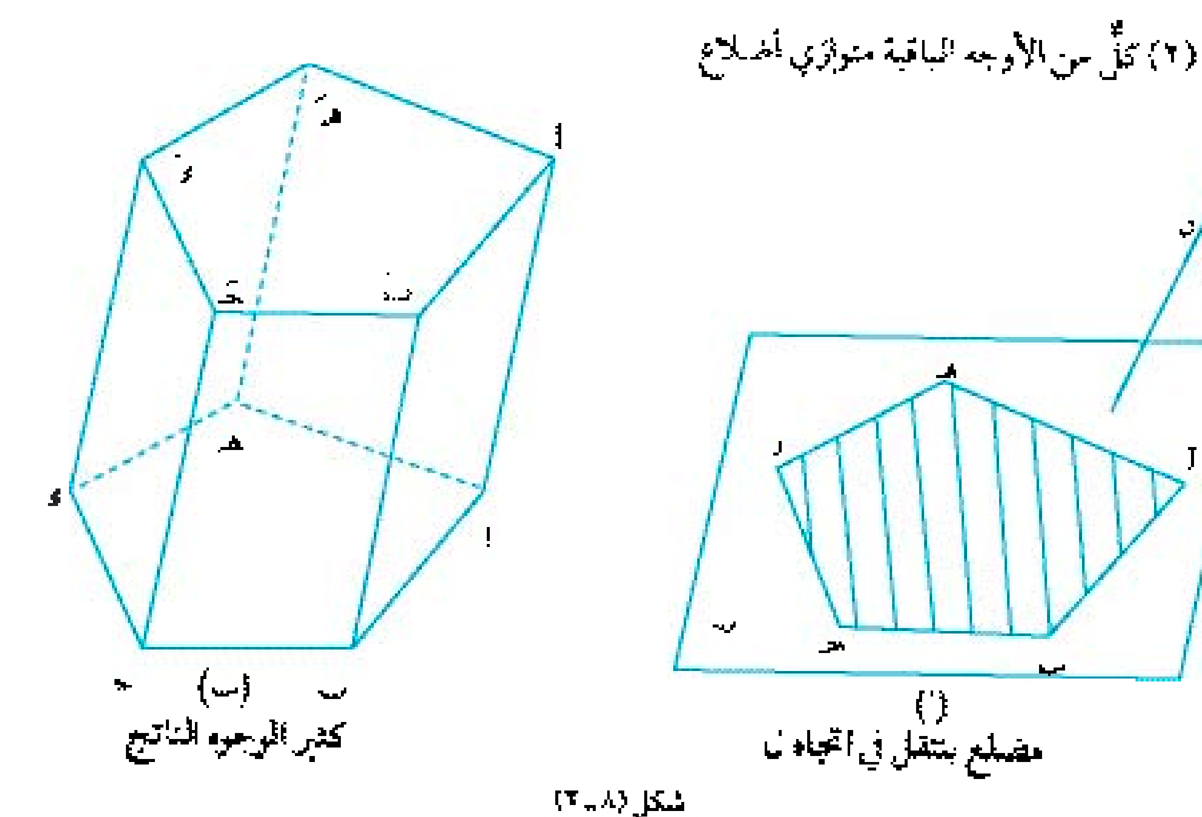
في الشكل (٨ ـ ١) سمّ كل الوجوه والأحرف والرؤوس والأقطار.

لقد جرت العادة على تصنيف كثيرات الوجوه بعدد أوجهها، فتحصلت على كثير الوجوه ذي الأربعة وجوه أو ذي الخمسة وهكذا، وأبسطها جميعاً ذو الأربعة وجوه.

في الشكل (٨ ـ ٢/أ) قطعة من المستوى س محاطة بالمضلع المحدب أ ب جـ د هـ والمستقيم ل حيث ل ∉ س. تخيّل أنك حركت هذه القطعة (والمضلع الذي يحدها) مسافة ما باتجاه المستقيم ل موازية لنفسها. لعلك تلاحظ أنك بهذه العملية قد غطيت حيزاً من الفراغ يشغله كثير وجوه يتميز بما يأتي:

(١) فيه وجهان مضلعان متطابقان ويقعان في مستويين متوازيين.

(٢) كلٌّ من الأوجه الباقية متوازي أضلاع



(ب) كثير الوجوه الناتج

(أ) مضلع ينتقل في اتجاه ل

شكل (٨ ـ ٢)

يسمّى كثير الوجوه منشوراً (أو موشوراً) إذا حقق الشرطين (١) ، (٢) السابقين الوجهان المتطابقان يسمّيان قاعدتي المنشور وتسمّى الأوجه الباقية أوجهاً جانبية . المستقيمات التي تتقاطع عندها الأوجه الجانبية تسمّى أحرفاً جانبية ويسمّى البعد العمودي بين مستويي القاعدتين ارتفاع المنشور.

تدريب (٨-٢)

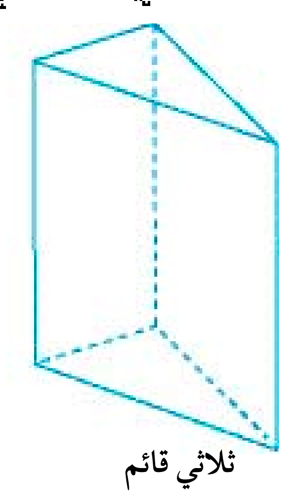
(١) سمِّ القاعدتين والأوجه الجانبية والأحرف الجانبية في الشكل (٨ - ٢) ب .

(٢) هل تتوازى جميع الأحرف الجانبية في المنشور ؟

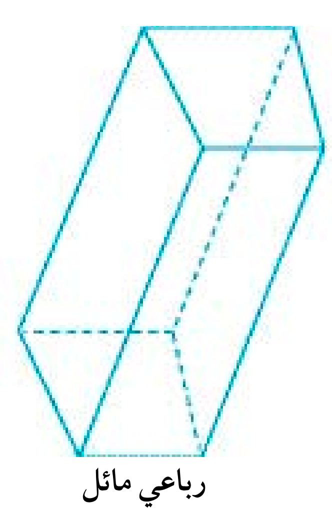
(٣) هل تتساوى أطوال جميع الأحرف الجانبية في المنشور ؟

يسمّى المنشور قائماً إذا كانت أحرفه الجانبية تُعامد القاعدتين وإلاّ سُمّي مائلاً . في المنشور القائم يكون الوجه الجانبي على هيئة مستطيل .

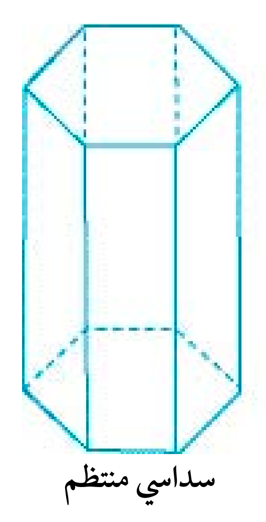
يسمّى المنشور منتظماً إذا كان قائماً، وكانت قاعدته مضلّعاً منتظماً . تصنّف المناشير بحسب شكل القاعدة فيسمّى المنشور ثلاثياً أو رباعياً أو خماسياً وهكذا إذا كانت قاعدته على شكل مثلث ، أو رباعي ، أو خماسي الخ .



ثلاثي قائم



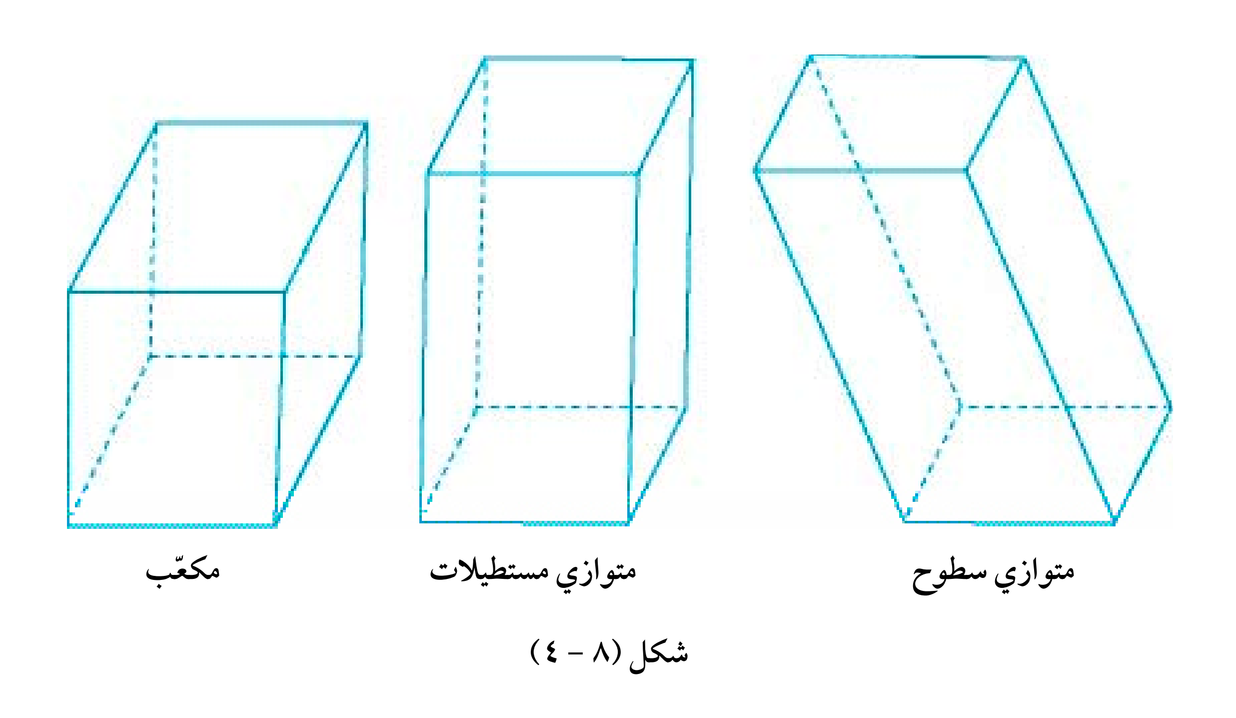
رباعي مائل



سداسي منتظم

شكل (٨ - ٣)

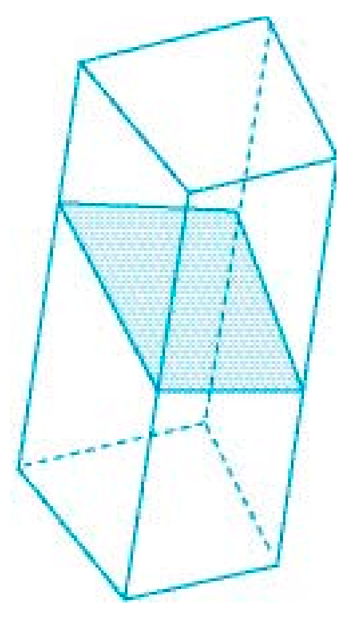
يسمّى المنشور متوازي السطوح إذا كان رباعياً وكانت قاعدته متوازي أضلاع. ويسمّى متوازي السطوح متوازي المستطيلات إذا كان قائماً وكانت قاعدته مستطيلاً. أما المكعّب فهو متوازي مستطيلات جميع حروفه متساوية الطول.



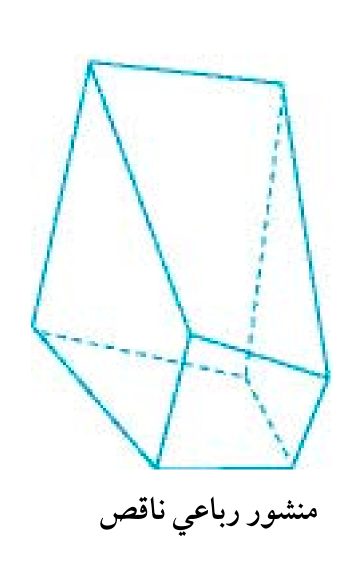
شكل (٨ – ٤)

يسمّى السطح الناتج من تقاطع مستوٍ مع مجسّم هندسي مقطعاً لذلك المجسّم. إذا كان المجسّم منشوراً وكان المستوي عمودياً على أحد الأحرف الجانبية فإنّه سيتعامد مع باقي الأحرف الجانبية (لماذا؟) ويسمّى المقطع عندئذٍ مقطعاً قائماً.

إذا قطعنا بمستوٍ لا يوازي القاعدة جميع الأحرف الجانبية لمنشور فإنّنا سنحصل على جزءين يسمّى كلٌّ منها منشوراً ناقصاً.



مقطع منشور رباعي



منشور رباعي ناقص

شكل (٨ – ٥)

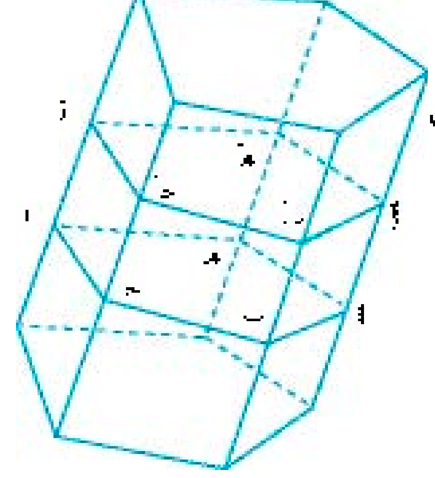
تدريب (٨–٣)

إذا قُطِع منشور بمستوٍ يوازي أحد أحرفه الجانبية فما هو شكل المقطع الناتج ؟

نظرية (٨ ـ ١)

إذا قُطِع منشور بمستويات متوازية تقطع جميع الأحرف الجانبية ، فإنّ المقاطع الناتجة هي مضلّعات متطابقة .

حرصاً منّا على وضوح العرض سنقوم بافتراض المنشور خماسياً ، (غير أنّ البرهان قائم مهما كان نوع المنشور ويستطيع الطالب التحقق من ذلك بنفسه) .



شكل (٨ ـ ٦)

المعطيات :

أ ب جـ د هـ ، أَ بَ جـَ دَ هـَ مقطعان للمنشور بمستويين متوازيين المطلوب إثباته : تطابق المضلعين أ ب جـ د هـ ، أَ بَ جـَ دَ هـَ .

البرهــان : (١) بما أن المستويين أ ب جـ د هـ ، أَ بَ جـَ دَ هـَ متوازيان فكل وجه جانبي سيقطعهما في مستقيمين متوازيين وعليه أ ب // أَ بَ ، ب جـ // بَ جـَ ، جـ د // جـَ دَ ، د هـ // دَ هـَ ، هـ أ // هـَ أَ

(٢) وبما أن الأحرف الجانبية للمنشور متوازية يصبح كل من أ ب بَ أَ ، ب جـ جـَ بَ ، جـ د دَ جـَ ، د هـ هـَ دَ ، هـ أ أَ هـَ متوازي الأضلاع .

إذن (٣) |أ ب| = |أَ بَ| ، |ب جـ| = |بَ جـَ| ، |جـ د| = |جـَ دَ| ، |د هـ| = |دَ هـَ| ، |هـ أ| = |هـَ أَ| .

كذلك (٤) بما أن أ ب // أَ بَ ، ب جـ // بَ جـَ فإن أ ب̂ جـ = أَ بَ̂ جـَ .

بالمثل (٥) ب جـ̂ د = بَ جـَ̂ دَ ، جـ د̂ هـ = جـَ دَ̂ هـَ ، د هـ̂ أ = دَ هـَ̂ أَ ،

هـ أ̂ ب = هـَ أَ̂ بَ .

إذن (٥) المضلعان متطابقان .

نتيجة (٨ – ١)

جميع المقاطع القائمة لمنشور ما متطابقة .

البرهـــان :

(١) المقاطع القائمة تنتج من مستويات تعامد الأحرف ولذا فهي جميعاً متوازية .

(٢) من نظرية (٨ ـ ١) هذه المقاطع متطابقة .

تعريف (٨ ـ ١)

المساحة الجانبية (أو مساحة السطح الجانبي) لمنشور هي مجموع مساحات أوجهه الجانبية .

المساحة الكلية (أو مساحة السطح الكلي) لمنشور هي مجموع مساحته الجانبية ومساحتي قاعدتيه .

نظرية (٨ ـ ٢)

المساحة الجانبية للمنشور تساوي حاصل ضرب محيط مقطعه القائم في طول حرفه الجانبي .

المعطيات :

أ ب جـ د هـ أَ بَ جَ دَ هَ منشور ، م ن ز ف ط مقطع قائم محيطه ح ، طول الحرف الجانبي ع .

شكل (٨ – ٧)

المطلوب إثباته :

مساحة السطح الجانبي تساوي ح × ي

البرهان :

(١) أ ب بَ أَ متوازي أضلاع

فيه |م ن| ⊥ |أ أَ|

إذن (٢) مساحة الوجه أ ب بَ أَ

هي |م ن| × |أ أَ| أي |م ن| × ي

بالمثل (٣) مساحة الوجه ب حـ حـَ بَ = |ن ز| × ي

مساحة الوجه حـ ء ءَ حـَ = |ز ف| × ي

مساحة الوجه ء هـ هـَ ءَ = |ف ط| × ي

مساحة الوجه هـ أ أَ هـَ = |ط م| × ي

إذن (٤) مساحة السطح الجانبي = (|م ن| + |ن ز| + |ز ف| + |ف ط| + |ط م|) × ي

= ح × ي

(٥) بما أن جميع المقاطع العمودية متطابقة ، فلن تتغير الخلاصة باختيار مقطع عمودي آخر . كذلك بتعديل واضح نستطيع الحصول على البرهان لو لم يكن المنشور خماسياً كما اعتبرناه هنا .

ملحوظة (٨ ـ ١)

المساحة الجانبية لمنشور قائم تساوي حاصل ضرب محيط القاعدة في الارتفاع

مثال (٨-١)

احسب المساحة الجانبية لمنشور مائل طول حرفه الجانبي ١٤ سم ومقطعه القائم مربع مساحته ١٢١ سم^2 . إذا كانت مساحة المنشور الكلية ٦٩٦ سم^2 فما مساحة قاعدته ؟

الحـــل :

(١) مساحة المربع = (الضلع)^2 .

إذن طول الضلع = $\sqrt{١٢١}$ = ١١ سم

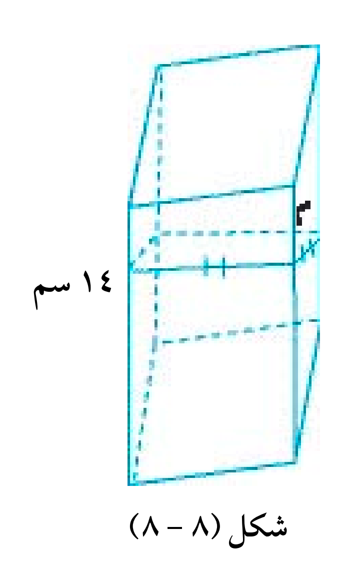
ومحيط المقطع القائم = ٤ × ١١ = ٤٤ سم

إذن (٢) المساحة الجانبية = ٤٤ × ١٤ = ٦١٦ سم^2

كذلك (٣) إذا كانت ف هي مساحة القاعدة

فإنَّ ٦٩٦ = ٦١٦ + ٢ ف

وبالتالي فإنَّ ف = ٨٠ ÷ ٢ = ٤٠ سم^2

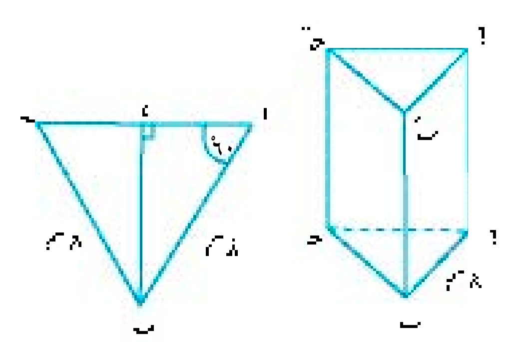


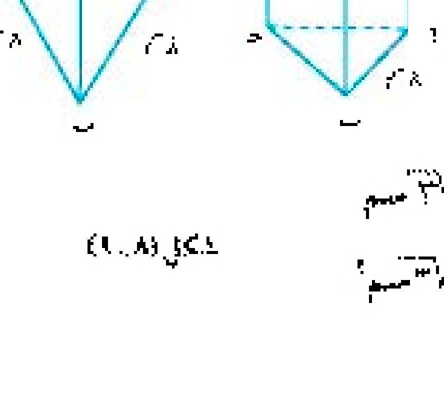
شكل (٨ – ٨)

مثال (٨-٢)

احسب المساحة الجانبية والكلية لمنشور ثلاثي منتظم ارتفاعه ١٢ سم وطول ضلع قاعدته ٨سم

الحـــل :





شكل (٨-٩)

(١) بما أن المنشور منتظم فهو قائم

وطول حرفه الجانبي هو الارتفاع أي ١٢ سم

(٢) محيط القاعدة = ٣ × ٨ = ٢٤ سم

إذن (٣) المساحة الجانبية = ٢٤ × ١٢ = ٢٨٨ سم^2

(٤) بما أن القاعدة مثلث متطابق الأضلاع

فإن ارتفاعها |ب د| = ٨ جا ٦٠ = ٨ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = ٤ $\sqrt{3}$ سم

إذن (٥) مساحة القاعدة = $\frac{1}{2}$ × ٨ × ٤ $\sqrt{3}$ = ١٦ $\sqrt{3}$ سم^2

و (٦) المساحة الكلية = ٢٨٨ + ٢ × ١٦ $\sqrt{3}$

= ٣٢ (٩ + $\sqrt{3}$) سم^2

مثال (٨-٣)

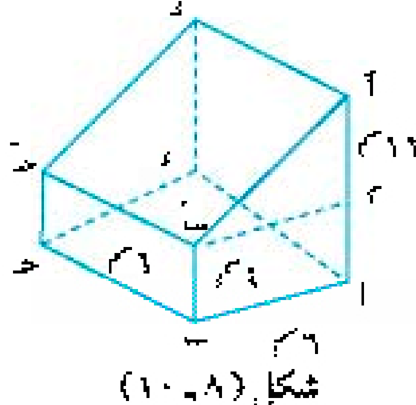
الشكل (٨-١٠) يبين منشور قائم تقاطع قاعدته مربع، طول ضلعه ٦ سم. إذا كان طول كل من الحرفين [أ أ̄] ، [د د̄] ١٢ سم، وطول كل من الحرفين [ب ب̄] ، [جـ جـ̄] ٤ سم، احسب المساحة الكلية.

الحـــل :

(١) إذا اعتبرنا أ ب ب̄ أ̄ ، د جـ جـ̄ د̄ قاعدتين

يصبح الشكل منشوراً قائماً تاماً طول حرفه الجانبي ٦ سم

وقاعدته شبه منحرف.



شكل (٨-١٠)

(٢) ارسم [ب ء] ⊥ [أ د] ، عندئذ |ء د| = ٦سم ، |أ ء| = ٤ سم و |ب ء| = ٨سم

(٣) من نظرية فيثاغورس : |أ ب|^{٢} = ٦^{٢} + ٨^{٢} = ١٠٠ وعليه |أ ب| = ١٠سم

إذن (٤) محيط القاعدة = ٤ + ٦ + ١٢ + ١٠ = ٣٢سم

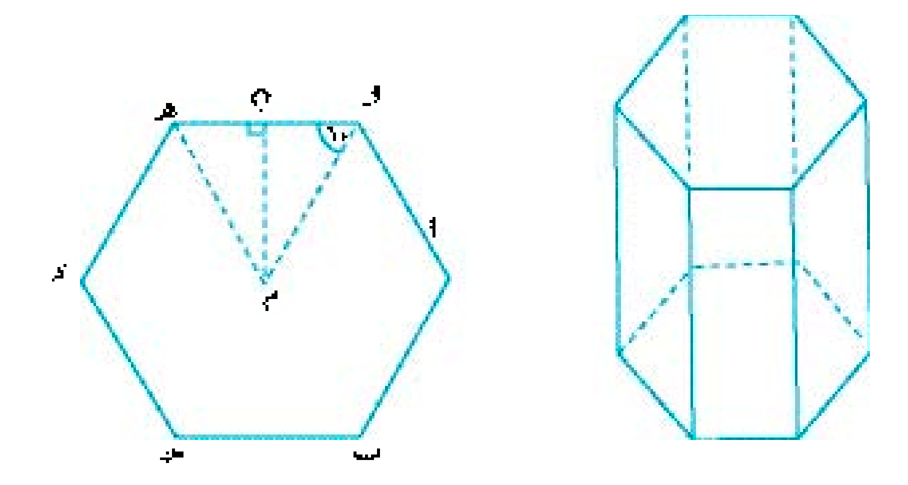
و (٥) المساحة الجانبية = ٣٢ × ٦ = ١٩٢سم^{٢}

(٦) مساحة شبه المنحرف = $\frac{١}{٢}$ (٤ + ١٢) × ٦ = ٤٨سم^{٢}

إذن (٧) المساحة الكلية = ١٩٢ + ٢ × ٤٨ = ٢٨٨سم^{٢}

مثال (٨-٤)

احسب المساحة الكلية لمنشور سداسي منتظم ارتفاعه ٢٠سم وطول ضلع قاعدته ٦سم



شكل (٨-١٤)

الحـــل :

(١) محيط القاعدة = ٦ × ٦ = ٣٦سم .

(٢) طول الحرف الجانبي = الارتفاع = ٢٠سم .

إذن (٣) المساحة الجانبية = ٣٦ × ٢٠ = ٧٢٠سم^{٢}

(٤) مساحة القاعدة = ٦ × مساحة △ م و هـ

(٥) ارتفاع △ م و هـ = $\frac{١}{٢}$ |بجـ| = ٣ ظا ٦٠° = ٣$\sqrt{٣}$سم

إذن (٦) مساحة △ م و هـ = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٣$\sqrt{٣}$ = ٩$\sqrt{٣}$سم^{٢}

و (٧) مساحة القاعدة = ٥٤$\sqrt{٣}$ سم^{٢}

و (٨) المساحة الكلية = ٧٢٠ + ٢ × ٥٤$\sqrt{٣}$سم^{٢}

= ٣٦ (٢٠ + ٣$\sqrt{٣}$) سم^{٢}

تمارين (٨ – ١)

(١) كم وجهاً جانبياً في المنشور: (أ) الثلاثي (ب) الرباعي (حـ) الخماسي ؟

(٢) إذا كان في المنشور وجهان جانبيان متجاوران مستطيلان فأثبت أن المنشور قائم .

(٣) احسب مساحة المضلّعات المنتظمة التالية بدلالة طول ضلعها :

(أ) الثلاثي (ب) الخماسي (حـ) السداسي (ء) الثماني .

(٤) احسب المساحة الجانبية والكلية لمنشور خماسي منتظم طول ضلع قاعدته ١٠سم وارتفاعه ٢٥سم .

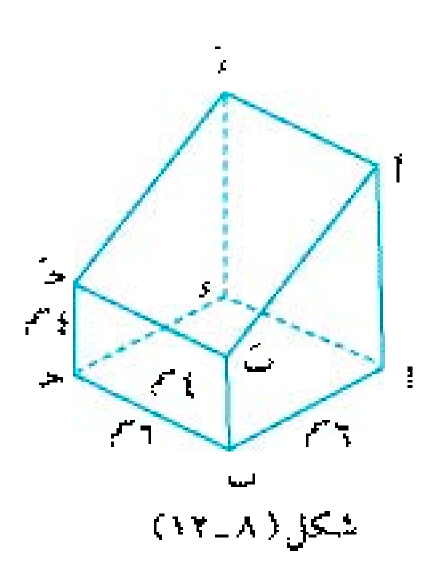
(٥) منشور ثلاثي مائل طول حرفه الجانبي ٦سم وقاعدته مثلث أضلاعه ١٣سم ، ١٢سم ، ٥سم . إذا كانت مساحته الكلية ٢٤٠ سم^2 فكم محيط مقطعه القائم .

(٦) منشور قائم ارتفاعه ٤سم وقاعدته على شكل معيّن قطراه ١٢سم و ١٦ سم . كم مساحته الكلية ؟

(٧) احسب المساحة الجانبية والكلية لمنشور ثماني منتظم طول ضلع قاعدته ١٢سم وحرفه الجانبي ٣٠سم .

(٨) أ ب حـ أَ بَ حـَ منشور ثلاثي مائل فيه الوجه أ حـ حـَ أَ مربع طول ضلعه ٦سم . إذا أخذنا النقطة ء على [ب بَ] بحيث أ ء ⊥ ب بَ فأثبت أن أ ء حـ مقطع قائم . إذا كان |أ ب| = ٥سم ، |ب ء| = ٤سم و |ب حـ| = √٣٧ سم فاحسب مساحة المنشور الجانبية .

(٩) اب حـ ء أَ بَ حـَ ءَ منشور قائم ناقص، قاعدته مربع طول ضلعه ٦ سم. إذا كان طول كل من الحرفين [ب بَ]، [حـ حـَ] ٤سم و أ بَ يميل عن القاعدة اب حـ ء بزاوية قياسها ٣٠° فاحسب مساحة المنشور الكلية (انظر شكل ٨ ـ ١٢).



شكل (٨ ـ ١٢)

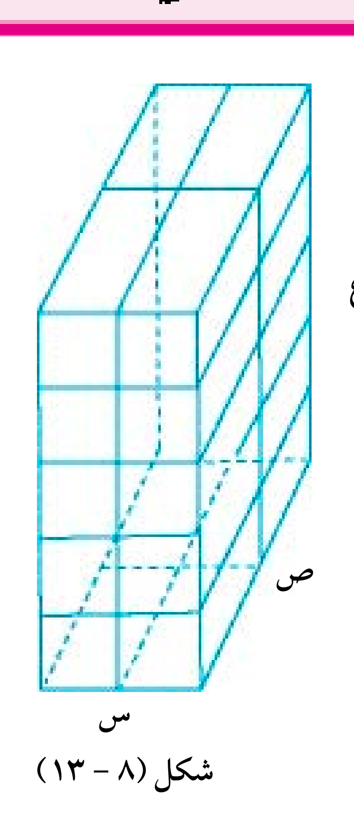
٨ – ٢ مسلمات الحجم ، حجم المنشور

نقدم في هذا البند أحد المفاهيم المهمة في تطبيقات هندسة الفراغية ألا وهو مفهوم الحجم . ونبدأ بافتراض إمكانية أن نربط مع كل مجسم هندسي نريد دراسته عدداً حقيقياً غير سالب نسميه حجم المجسم بحيث لا تناقض ما نتوقع حدسياً أن تحققه حجوم الأجسام في الفراغ وبحيث تحقق المسلمتان التاليتان :

مسلّمة الحجم الأولى :

حجم متوازي المستطيلات ذي الأبعاد س ، ص ، ع هو س . ص . ع .

لتبرير هذه المسلمة نلاحظ أن من الطبيعي أن نتخذ من حجم المكعب الذي طول ضلعه وحدة للطول وحدة للحجوم . إذا كان كلّ من س ، ص ، ع عدداً صحيحاً ، فمن اليسير التحقق من أن العدد اللازم من هذه المكعبات لملء متوازي المستطيلات ذي الأبعاد س ، ص ، ع هو س . ص . ع شكل (٨ – ١٣) يبين الأمر في حالة متوازي المستطيلات ذي الأبعاد ٢ ، ٢ ، ٥ .



شكل (٨ – ١٣)

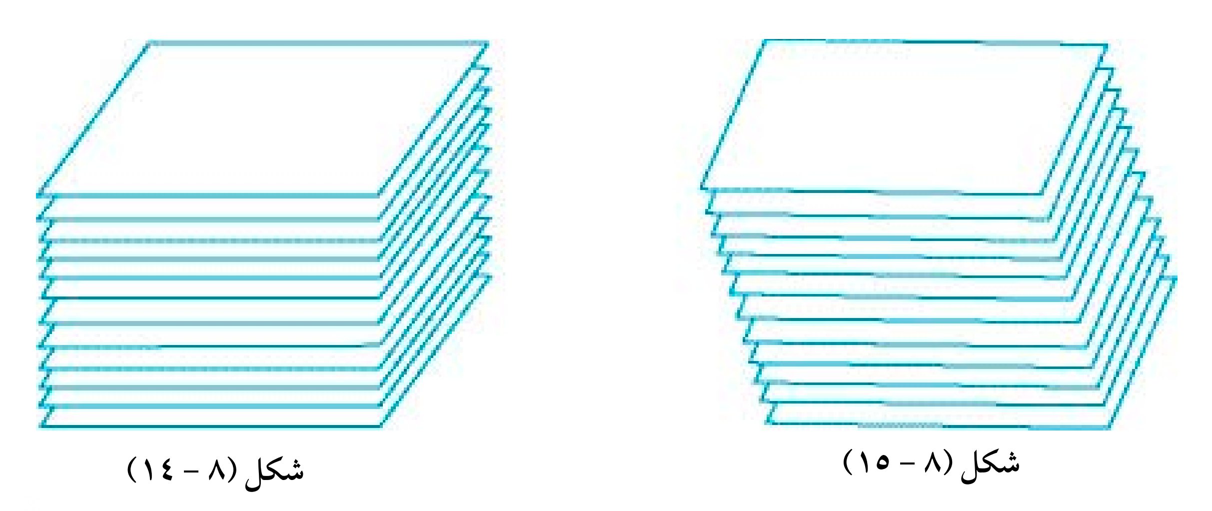
ملحوظة (٨ – ٢)

إذا أسميناس طولاً و ص عرضاً فيكون ع ارتفاعاً نجد أنّ حجم

متوازي المستطيلات = (س × ص) × ع

= مساحة القاعدة × الارتفاع .

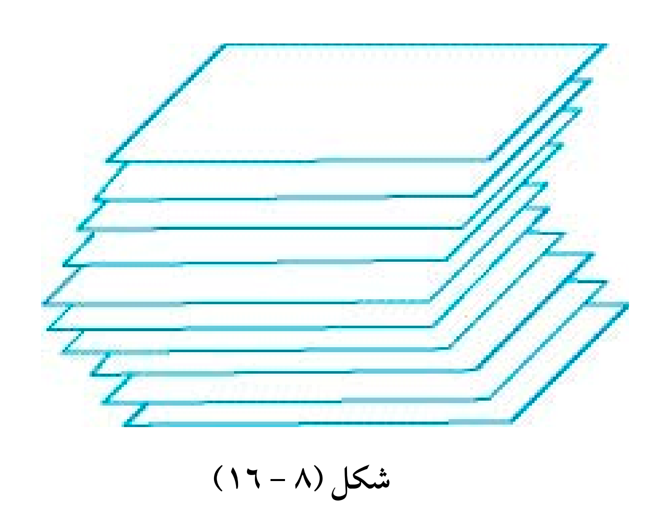
ولكي تدرك معقولية المسلّمة التالية خذ حزمة من الأوراق متساوية الأبعاد (مثل أوراق الكتاب الذي تقرأه) ورتّبها بحيث تشكّل متوازي مستطيلات (شكل ٨ ـ ١٤) ثم حرّك الأوراق عن مستوياتها لتصبح لديك منشوراً مائلاً كما في الشكل (٨ ـ ١٥) .



شكل (٨ – ١٤)

شكل (٨ – ١٥)

لاحظ أنّ حجم متوازي السطوح الناتج لا زال مساوياً مجموع حجوم الأوراق وعليه فإنّ حجمه يساوي حجم متوازي المستطيلات الذي بدأنا منه . هذه النتيجة قائمة مهما كان شكل المجسّم الذي ننتهي إليه بتحريك الأوراق في مستوياتها وسيكون حجم المجسّم الناتج هو حجم متوازي المستطيلات (انظر شكل ٨ ـ ١٦) .



شكل (٨ - ١٦)

ونتساءل الآن ما هي السمة المشتركة بين المجسّمات الثلاثة في الأشكال (٨ ـ ١٤)، (٨ ـ ١٥) (٨ ـ ١٦) والإجابة هي أنّه إذا قطع أي مستوٍ أفقي أحدها فإنّه يقطع الآخرين والمقاطع الناتجة متساوية المساحة (لأنّ الأوراق متطابقة). لعلّ معقولية المسلّمة التالية أضحت واضحة الآن.

مسلمة الحجم الثانية :

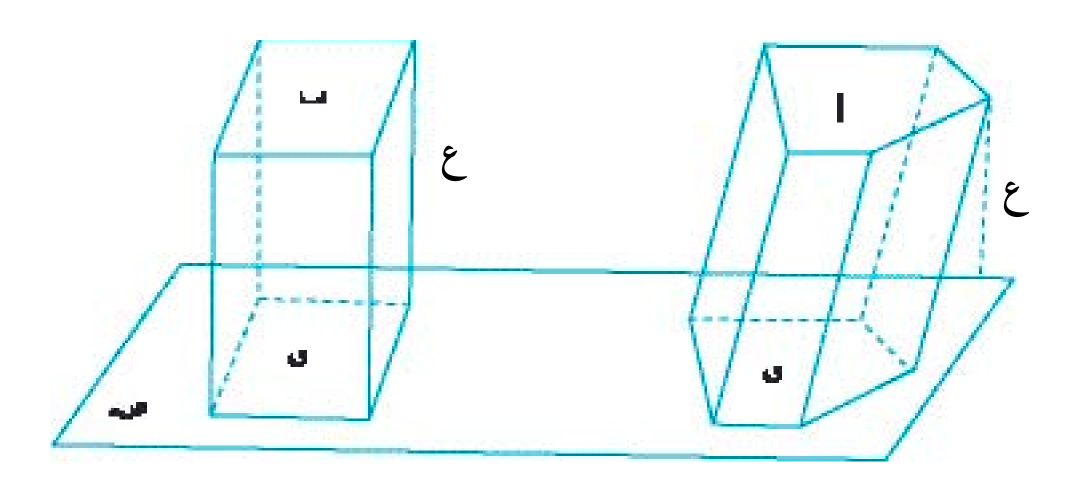
افرض أنّ ا ، ب مجسّمان هندسيان و ح مستوٍ ما. إذا وجدنا أن كل مستوٍ موازٍ للمستوى ح إمّا يقطع كلاً من المجسّمين أو لا يقطع أيّاً منهما، وإذا قطعهما كانت مساحتا المقطعين الناتجين متساويتين فإنّ للمجسّمين ا ، ب الحجم نفسه.

تدريب (٨-٤)

ما هي الخصائص الأخرى التي تتوقع حدساً توافرها لحجوم الأجسام في الفراغ ؟

نظرية (٨ ـ ٣)

حجم المنشور هو حاصل ضرب مساحة قاعدته في ارتفاعه .



شكل (٨ – ١٧)

المعطيات : أ منشور مساحة قاعدته ن وارتفاعه ع

المطلـوب : إثبات أنَّ حجم أ = ن × ع

البرهــان :

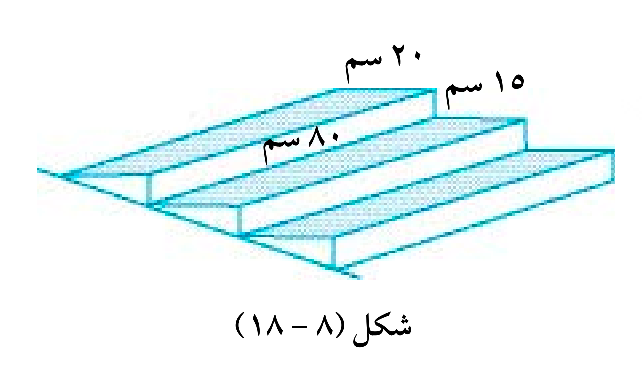
(١) نفرض أنَّ ص هو مستوي قاعدة المنشور أ . ارسم متوازي مستطيلات ب مساحة قاعدته ن وارتفاعه ع بحيث تكون قاعدته على ص وبحيث يقع مع أ في الجهة نفسها من ص

(٢) افرض أنَّ مـ مستوٍ يوازي مـ. إذا كان مـ في غير جهة أ ، ب أو كان بعده عن مـ أكبر من ع فإنه لن يقطع أيًّا من أ ، ب. أمّا إذا كان في نفس جهة أ ، ب وارتفاعه لا يزيد عن ع فإنه يقطع كلاًّ من أ ، ب في جميع أحرفهما الجانبية.

(٣) من النظرية (٨ ـ ١) المقطع الناتج من تقاطع مـ و أ يطابق قاعدة أ وعليه مساحته هي ق كذلك من النظرية نفسها المقطع الناتج من تقاطع مـ و ب يطابق قاعدة ب ولذا مساحته هي ق أيضاً إذن (٤) من مسلّمة الحجم المتشابهة أ ، ب لهما الحجم نفسه. لكن (٥) حجم متوازي المستطيلات ب = ق × ع (المسلمة الأولى للحجم) إذن (٦) حجم المنشور = ق × ع.

مثال (٨–٥)

الشكل (٨ ـ ١٨) يبيّن ثلاث درجات من سلّم خرساني كل درجة فيه على هيئة منشور ثلاثي قائم له الأبعاد الموضحة. إذا كان عدد درجات السلم ٢٠ فاحسب حجم الخرسانة اللازمة لصنع السلّم.



شكل (٨ – ١٨)

الحـــل :

(أ) حجم الدرجة الواحدة = مساحة القاعدة × الارتفاع

$= (\frac{١}{٢} \times ١٥ \times ٢٠) \times ٨٠$

$= ١٢٠٠٠$ سم³

(٢) حجم المدرجات العشرين = ٢٠ × ١٢٠٠٠ = ٢٤٠٠٠٠ سم٣

(٣) حجم الخرسانة المطلوبة = ٠,٢٤ م٣ .

في النظرية الآتية ، والتي نوردها هنا بدون برهان ، نقدّم قانوناً آخر لحساب حجم المنشور

نظرية (٨ ـ ٤)

حجم المنشور يساوي حاصل ضرب مساحة المقطع القائم في طول الحرف الجانبي .

البرهـــان : (غير مطلوب)

مثال (٨-٦)

في منشور رباعي مائل القاعدة على هيئة شبه منحرف ضلعاه المتوازيان ١٢ سم ، ٨سم والبعد بينهما ٦ سم . إذا كانت الأحرف الجانبية تميل على مستوى القاعدة بزاوية قياسها ٣٠° ، وكان طول الحرف الجانبي ١٦ سم فاحسب حجم المنشور. إذا قطع المنشور بمستوٍ يعامد الأحرف الجانبية فما هي مساحة المقطع الناتج .

الحـــل :

(١) الشكل (٨-١٩) يوضح المنشور

من ب′ أنزل العمود [ب′ م] على القاعدة

∴ ق(∠ ب ب′ م) = ٣٠° (لماذا؟)

(٢) مساحة القاعدة = $\frac{1}{2}$ (٨ + ١٢) × ٦

= ٦٠ سم²

كذلك (٣) ارتفاع المنشور = ‖ب′ م‖ = ‖ب ب′‖ جا ٣٠° = ١٦ × $\frac{1}{2}$

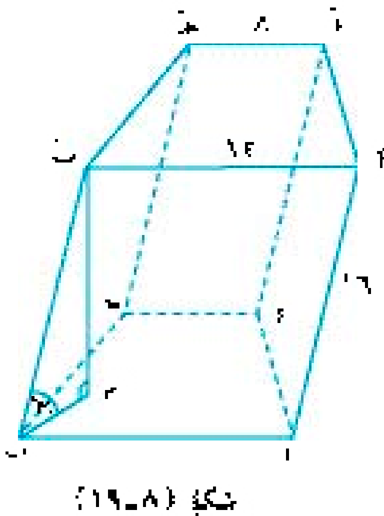
= ٨ سم

إذن (٤) حجم المنشور = ٦٠ × ٨ = ٤٨٠ سم³

كذلك (٥) حجم المنشور = مساحة المقطع القائم × الحرف الجانبي

وعليه . ٤٨٠ = مساحة المقطع القائم × ١٦

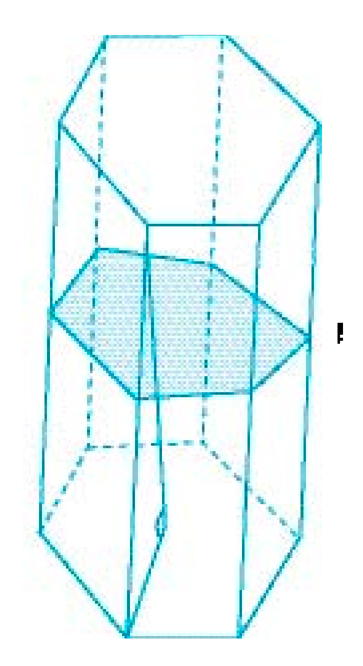
إذن (٦) مساحة المقطع القائم = $\frac{٤٨٠}{١٦}$ = ٣٠ سم².

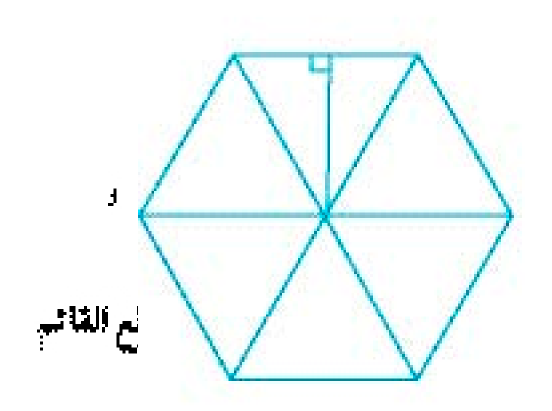


شكل (٨-١٩)

مثال (٨-٧)

في منشور سداسي مائل طول حرفه الجانبي ١٠ سم، تميل الأحرف الجانبية على مستوى القاعدة بزاوية قياسها ٦٠°. إذا قطع المنشور بمستوٍ يعامد الأحرف الجانبية، وكان المقطع الناتج منتظماً ومساحته تساوي ٢٤ √٣ سم² فاحسب أولاً: حجم المنشور، ثانياً: مساحة قاعدته، ثالثاً: مساحته الكلية.





شكل (٨ ـ ٣٠)

الحــل :

(١) حجم المنشور = مساحة المقطع القائم × طول الحرف الجانبي

$= ٢٤\sqrt{٣} \times ١٠ = ٢٤٠\sqrt{٣}$ سم^{٣}

(٢) ارتفاع المنشور = ١٠ جا ٦٠° $= ١٠ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (لماذا ؟)

$= ٥\sqrt{٣}$ سم

حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع

إذن مساحة القاعدة $= \frac{٢٤٠\sqrt{٣}}{٥\sqrt{٣}} = ٤٨$ سم^{٢}

(٣) مساحة المقطع القائم = ٦ × مساحة مثلث م و هـ

$= ٦ \times \frac{١}{٢} \cdot ل \cdot \frac{ل}{٢}$ ظا ٦٠°

$= \frac{٣\sqrt{٣}}{٢} ل^٢$ حيث ل هو طول ضلع السداسي

وبما أن مساحة المقطع القائم = $٢٤\sqrt{٣}$ فإن $ل^٢ = \frac{٢٤\sqrt{٣} \times ٢}{٣\sqrt{٣}} = ١٦$ سم^٢ أي ل = ٤ سم

فيكون محيط المقطع القائم = ٦ × ٤ = ٢٤ سم

إذن المساحة الجانبية = محيط المقطع القائم × طول الحرف الجانبي

= ٢٤ × ١٠ = ٢٤٠ سم^٢

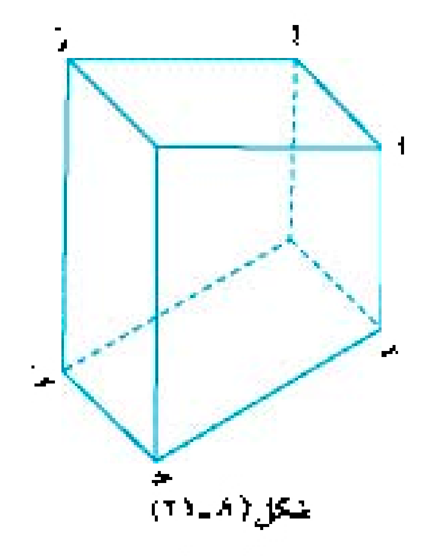
والمساحة الكلية = ٢٤٠ + ٢ × ٤٨

= ٣٣٦ سم^٢

تدريب (٨-٥)

بملاحظة المثالين (٨ ـ ٦) ، (٨ ـ ٧) هل تستطيع استنتاج القاعدة التي تربط ارتفاع المنشور وطول حرفه الجانبي وقياس الزاوية بين الحرف الجانبي والقاعدة؟

تمارين (٨ – ٢)



شكل (٨ ـ ٢١)

(١) الشكل (٨ ـ ٢١) يبين حوض سباحة على هيئة منشور رباعي قائم قاعدته أ ب جـ د على شكل شبه منحرف فيه أ د ⊥ أ ب، إذا كان |أ ب| = ٢٣ م، |د جـ| = ٩ م، |أ د| = ٦ م، |أ أ'| = ٢,٤ م فاحسب حجم الحوض.

(٢) أ ب جـ أ' ب' جـ' منشور ثلاثي قائم قاعدته المثلث أ ب جـ. إذا كان |ب جـ| = ٢٤ م، |أ ب| = |أ جـ| = ٢٤ م، |أ أ'| = ١٠ م، فاحسب حجم المنشور ومساحته الكلية.

(٣) في منشور خماسي منتظم طول الحرف الجانبي ٢٠ سم وطول ضلع القاعدة ١٦ سم.

ما حجم المنشور وما مساحته الكلية؟

(٤) أ ب جـ أ' ب' جـ' منشور ثلاثي مائل طول حرفه الجانبي |أ أ'| = ٢٠ سم، وتميل أحرفه على مستوي القاعدة أ ب جـ بزاوية قياسها ٦٠°.

إذا كان |أ ب| = ٦ سم، |أ جـ| = ٨ سم، |ب جـ| = ١٠ سم فاحسب حجم المنشور ومساحة المقطع القائم.

(٥) أ ب جـ د أ' ب' جـ' د' منشور رباعي مائل حجمه ١٨٠٠ سم³. إذا كان طول حرفه الجانبي |أ أ'| = ٣٠ سم، وقاعدته أ ب جـ د على هيئة معين طولا قطريه ١٠ سم، ٢٤ سم فاحسب الزاوية بين

الحرف الجانبي وقاعدة المنشور.

(٦) في منشور ثلاثي مائل طول الحرف الجانبي ١١ سم ومساحات أوجهه الجانبية هي ٦٠ سم^2 ، ٦٠ سم^2 ، ٩٦ سم^2 فما حجمه ؟

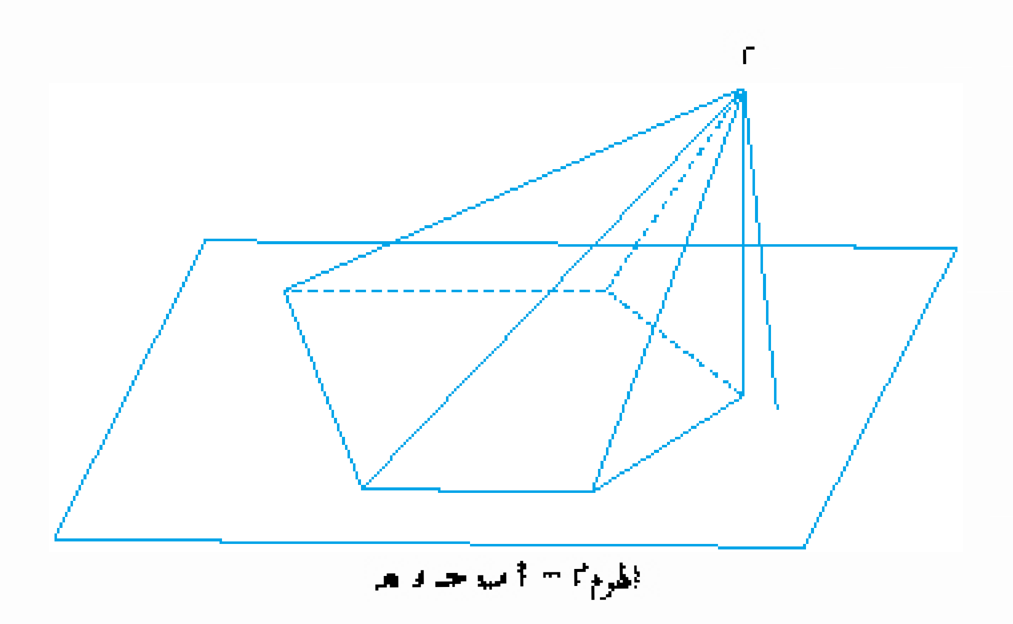
(٧) أ ب جـ د أَ بَ جـَ دَ منشور رباعي مائل طولا قطري قاعدته ١٤ سم ، ٢٠ سم والزاوية بينهما ٣٠° إذا كان الوجه ب جـ جـَ بَ مستطيل يميل على القاعدة بزاوية جيبها $\frac{٣}{٨}$ ، وكان |ب بَ| = ١٦ سم فاحسب حجم المنشور.

(٨) أ ب جـ أَ بَ جـَ منشور ثلاثي قائم حجمه ٣٧٥ سم^3. إذا كانت القاعدة أ ب جـ على شكل مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه ١٠ سم فاحسب **أولاً** : طول حرف المنشور، **ثانياً** : المساحة الجانبية للمنشور ، **ثالثاً** : قياس الزاوية الزوجية بين المستويين أ ب جـ ، أَ بَ جـ .

(٨ – ٣) الهـــرم

الهرم كثير وجوه فيه أحد الوجوه على هيئة مضلع و بقية الوجوه مثلثات تلتقي في نقطة واحدة .

للحصول على هرم خذ مضلعاً ق في مستوٍ س ونقطة م خارج س . الشكل الناتج من اتحاد كل القطع المستقيمة [م ن] حيث ن ∈ ق يسمى هرماً.



الهرم م — أ ب جـ د هـ

شكل (٨ ـ ٢٣)

م تسمى رأس الهرم، و ق قاعدته، وباقي الأوجه تسمى أوجهاً جانبية ، وتتقاطع في مستقيمات تسمى الأحرف الجانبية

ارتفاع الهرم هو طول القطعة العمودية [م م'] من م إلى س .

تصنف الأهرامات بحسب شكل قاعدتها فيسمى الهرم ثلاثياً أو رباعياً أو خماسياً وهكذا إذا

كانت قاعدته مثلثاً أو رباعياً أو خماسياً . . . يدعى الهرم قائماً إذا كانت قاعدته مضلعاً منتظماً وأحرفه الجانبية متطابقة . هذا ويدعى الهرم الثلاثي كذلك باسم رباعي الوجوه، وإذا كانت حروفه متساوية الطول سُمّي رباعيّ وجوه منتظماً .

تدريب (٨ – ٦)

أثبت ما يلي :

(١) في الهرم القائم يكون موقع العمود النازل من الرأس على القاعدة هو مركزها (أي النقطة التي لها البعد نفسه عن جميع رؤوس القاعدة).

(٢) الأوجه الجانبية للهرم القائم مثلثات متطابقة وكل منها متطابق الضلعين

(٣) ارتفاعات الأوجه الجانبية للهرم القائم متساوية الطول .

(٤) أوجه رباعي الوجوه المنتظم مثلثات متطابقة الأضلاع ومتطابقة ، (ويمكن اعتبار أي وجه فيه قاعدة).

المساحة الجانبية للهرم تعني مجموع مساحات وجوهه الجانبية ، أمّا مساحته الكلية فهي مجموع المساحة الجانبية ومساحة القاعدة .

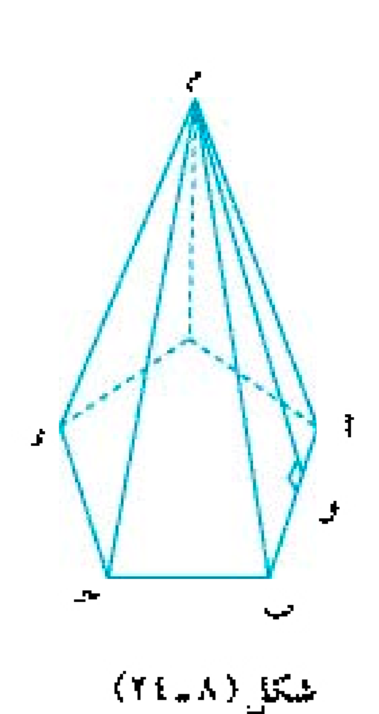
نظرية (٨ ـ ٥)

المساحة الجانبية للهرم القائم = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة في ارتفاع الوجه الجانبي .

المعطيات : هرم قائم

المطلوب إثباته : المساحة الجانبية = $\frac{1}{2}$ محيط القاعدة × ارتفاع الوجه الجانبي

البرهان :



شكل (٨-٢٤)

(١) افرض أنّ القاعدة مضلع منتظم عدد أضلاعه ن (في الشكل ن = ٥) وافرض أنّ طول ضلعه هو ل .

بما أنّ الهرم قائم فارتفاعات جميع الوجوه الجانبية متساوية الطول . ليكن طول الواحد منها ع .

(٢) بما أنّ الأوجه متطابقة فإنّ المساحة الجانبية تساوي ن × مساحة مثلث م أ ب

(٣) مساحة △ م أ ب = $\frac{1}{2}$ ع ل

ومحيط القاعدة = ن ل

(٤) إذن المساحة الجانبية = ن × $\frac{1}{2}$ ع ل

= $\frac{1}{2}$ × ن ل × ع

= $\frac{1}{2}$ محيط القاعدة × ارتفاع الوجه الجانبي .

تدريب (٨-٧)

ما هي المساحة الكلية لرباعي وجوه منتظم طول حرفه ل ؟

تدريب (٨-٨)

م ـ أ ب حـ ء هرم رباعي قائم، طول حرفه ٥ سم وطول ضلع قاعدته ٨ سم. احسب مساحته الجانبية ومساحته الكلية.

حجم الهـرم

نظرية (٨ ـ ٦)

ليكن م ـ أ ب حـ هرماً ثلاثياً و أ′ ب′ حـ′ مقطعاً يوازي القاعدة أ ب حـ ويبعد ك وحدة عن رأس الهرم م. إذا كان ع هو ارتفاع الهرم وكانت ن مساحة قاعدته فإنّ مساحة المقطع أ′ ب′ حـ′ هي $\frac{ك^2}{ع^2} \times ن$.

المعطيـات :

م ـ أ ب حـ هرم ثلاثي ارتفاعه ع وقاعدته أ ب حـ مساحتها ن، المقطع أ′ ب′ حـ′ يوازي القاعدة ويبعد ك عن الرأس.

المطلـوب إثباته : مساحة المقطع أ′ ب′ حـ′ = $\frac{ك^2}{ع^2} \times ن$

شكل (٨ ـ ٢٥)

البرهـــان :

(١) بما أن المستوى أَ بَ حَ يوازي المستوى أ ب حـ فإن أَ بَ // أ ب ، بَ حَ // ب حـ ،
أَ حَ // أ حـ .

إذن (٢) $\hat{}$ أَ بَ حَ = $\hat{}$ أ ب حـ ، $\hat{}$ بَ حَ أَ = $\hat{}$ ب حـ أ ، أي أن Δ أَ بَ حَ
يشابه Δ أ ب حـ ولذا فإن :

$$\frac{\text{مساحة } \Delta \text{ أَ بَ حَ}}{\text{مساحة } \Delta \text{ أ ب حـ}} = \frac{|\text{أَ بَ}|^2}{|\text{أ ب}|^2}$$

أيضاً (٣) Δ م بَ حَ يشابه Δ م ب حـ وعليه

$$\frac{|\text{بَ حَ}|}{|\text{ب حـ}|} = \frac{|\text{م حَ}|}{|\text{م حـ}|}$$

(٤) ولو رسمنا [م هـ] عموداً على القاعدة فلاقى المقطع أَ بَ حَ عند هَ فإننا نجد أن
|م هـ| = ع ، |م هَ| = ك وأن Δ م هَ حَ يشابه Δ م هـ حـ فنستنتج أن :

$$\frac{|\text{م حَ}|}{|\text{م حـ}|} = \frac{|\text{م هَ}|}{|\text{م هـ}|} = \frac{\text{ك}}{\text{ع}}$$

(٥) من الخطوات ٢ ، ٣ ، ٤ نستنتج أن

$$\frac{\text{مساحة } \triangle \text{ أَ بَ جَ}}{\text{مساحة } \triangle \text{ أ ب جـ}} = \frac{ك^2}{ع^2}$$

وعليه :

$$\text{مساحة } \triangle \text{ أَ بَ جَ} = \frac{ك^2}{ع^2} \times ن$$

نظرية (٨ ـ ٧)

في أي هرم مساحة المقطع الذي يوازي القاعدة ويبعد ك عن الرأس هي $\frac{ك^2}{ع^2} \times ن$ حيث ع هو ارتفاع الهرم ون هي مساحة قاعدته.

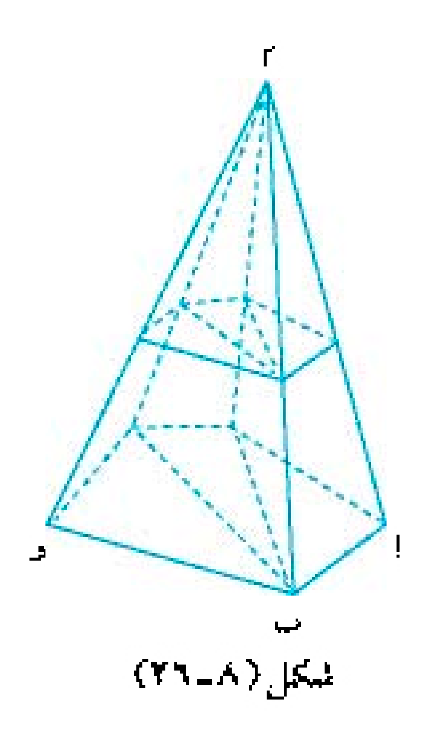
حرصاً منا على وضوح العرض سنفترض أن الهرم خماسي ونترك للطالب إجراء أي تعديلات لازمة للحصول على البرهان في الحالات الأخرى.

البرهـــان : (غير مطلوب)

المعطيات : م ـ أ ب جـ د هـ هرم خماسي المقطع أَ بَ جَ دَ هَ يوازي القاعدة ويبعد عن الرأس يساوي ك ، ع هو ارتفاع الهرم، ن هي مساحة قاعدته.

المطلوب إثباته : مساحة أ'ب'جـ'د'هـ' = $\frac{ف'^2}{ع^2}$ × ق

البرهــان :



شكل (٨ – ٢٦)

(١) تقسم القاعدة كما في شكل (٨ – ٢٦) إلى مثلثات مساحاتها ق$_1$ ، ق$_2$ ، ق$_3$ ونفرض أنّ المساحات المناظرة على المقطع هي ق'$_1$ ، ق'$_2$ ، ق'$_3$

(٢) م – أ ب هـ ، م – ب د هـ ، م – ب جـ د أهرامات ثلاثية وعليه من النظرية (٨ – ٦) نجد أنّ

ق'$_1$ = $\frac{ف'^2}{ع^2}$ × ق$_1$ ، ق'$_2$ = $\frac{ف'^2}{ع^2}$ × ق$_2$ ، ق'$_3$ = $\frac{ف'^2}{ع^2}$ × ق$_3$

(٣) مساحة المقطع أ'ب'جـ'د'هـ' = ق'$_1$ + ق'$_2$ + ق'$_3$

= $\frac{ف'^2}{ع^2}$ (ق$_1$ + ق$_2$ + ق$_3$)

= $\frac{ف'^2}{ع^2}$ × ق ،

نتيجة (٨ ـ ٢)

إذا تساوى ارتفاعا هرمين وتساوت مساحتا قاعدتيهما فإن للهرمين الحجم نفسه

البرهــــان :

(١) ضع الهرمين بحيث تنطبق قاعدتاهما على مستوٍ واحد س وافرض أنّ ارتفاع الهرمين هو ع ومساحة كل قاعدة ق

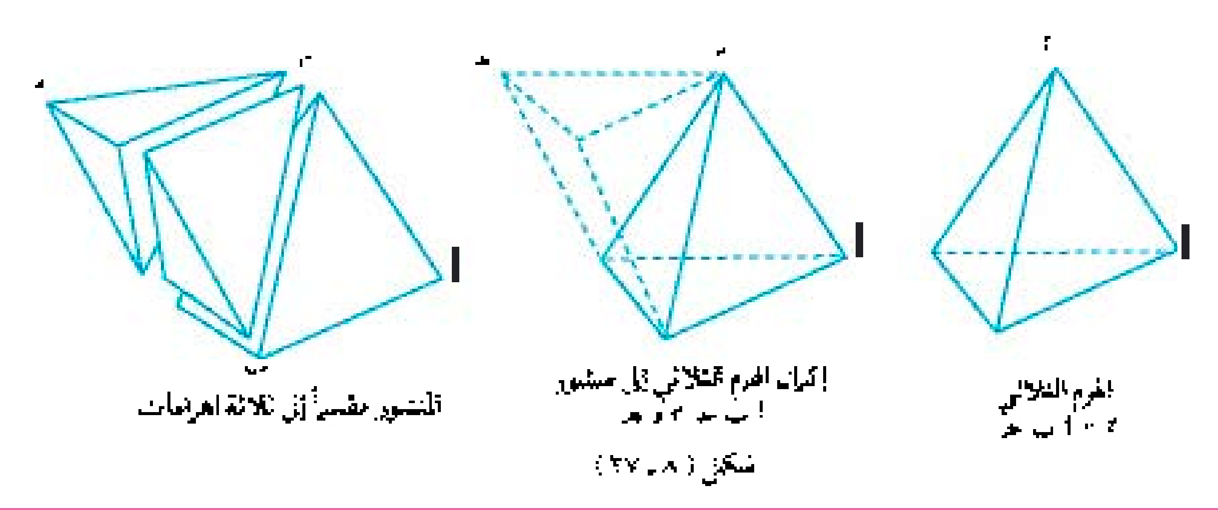
(٢) خذ أي مستوٍ ص يوازي المستوي س فإنّ ص إمّا يقطع كلا الهرمين أو لا يقطع أيًّا منهما، وإذا قطعهما فكل من المقطعين الناتجين سيكون له البعد نفسه ك عن رأس الهرم

(٣) من النظرية (٨ ـ ٧) مساحة كل من المقطعين هي $\frac{ك^2}{ع^2}$ × ق

إذن (٤) من مسلّمة الحجم الثابتة للهرمين الحجم نفسه.

> **نظرية (٨ ـ ٨)**
>
> حجم الهرم الثلاثي يساوي ثلث حاصل ضرب الارتفاع في مساحة القاعدة

(برهان النظرية غير مطلوب)



شكل (٨ ـ ٢٧)

المعطيـات : م ـ أ ب جـ هرم ثلاثي ارتفاعه ع ومساحة قاعدته ب

المطلوب إثباته : حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ × ع × ب

البرهــان :

(١) أكمل الهرم ليصبح منشوراً ثلاثياً أ ب جـ م د هـ وذلك برسم ب د ، جـ هـ موازيين للمستقيم أ م وبحيث |أ م| = |ب د| = |جـ هـ|

(٢) المنشور الذي كوّنّاه هو اتحاد ثلاثة أهرامات م ـ أ ب جـ ، م ـ ب جـ د ، م ـ د جـ هـ . هذه الأهرامات لا تتقاطع إلا في أحرفها . سنثبت أنّ أحجامها متساوية .

(٣) خذ الهرمين م ـ د هـ جـ ، م ـ ب جـ د واعتبر م هي الرأس لكل منهما . عندئذ تقع قاعدتاهما على المستوي نفسه (مستوي متوازي الأضلاع ب جـ هـ د) . وبما أنّ مساحة كل واحدة منهما هي نصف مساحة متوازي الأضلاع ب جـ هـ د فالهرمين قاعدتان لهما المساحة نفسها كما أنّ لهما الارتفاع نفسه (إذ إنّ الارتفاع في الحالتين هو طول القطعة العمودية من م على المستوى ب جـ هـ د)

إذن (٤) من النتيجة (٨ ـ ٢) حجم م ـ د هـ جـ = حجم م ـ ب جـ د

(٥) خذ الآن الهرمين م ـ أ ب جـ ، م ـ ب جـ د واعتبر جـ هي الرأس . بتعديل الحجة المقدمة في (٣) نرى أنّ ارتفاعي الهرمين متساويان وأنّ مساحتي قاعدتيهما متساويتان فنستنتج أنّ حجم م ـ أ ب جـ = حجم م ـ ب جـ د

الآن (٦) حجم المنشور = حجم م ـ أ ب جـ + حجم م ـ ب جـ د + حجم م ـ د هـ جـ

وعليه فإن حجم م ـ أ ب جـ = $\frac{١}{٣}$ حجم المنشور .

لكن (٧) حجم المنشور = ع × ق (نظرية ٨ ـ ٣)

إذن (٨) حجم الهرم م ـ أ ب جـ = $\frac{١}{٣}$ ع × ق

نظرية (٨ ـ ٩)

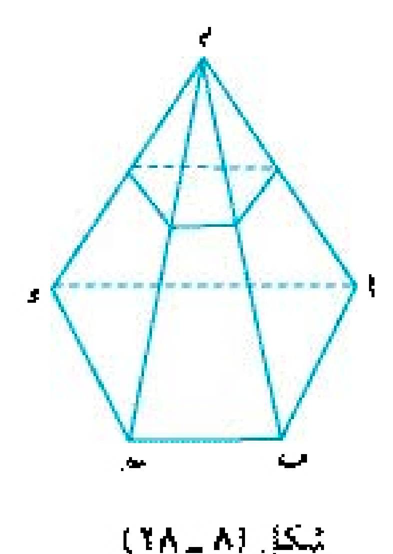
حجم أي هرم يساوي ثلث حاصل ضرب الارتفاع في مساحة القاعدة

البرهــان : (غير مطلوب) نستطيع أن نقدم البرهان بطريقتين . الطريقة الأولى هي أن نقوم بتقسيم القاعدة إلى مثلثات ثم نستخدم النظرية (٨ ـ ٨) . أمّا الطريقة الثانيـة فهي أن نقوم برسم هرم ثلاثي قاعدته على مستوى قاعدة الهرم المعطى وتساويها في المساحة وارتفاعه يساوي ارتفاع الهرم المعطى ثم نقوم بعد ذلك باستخدام النظرية (٨ ـ ٨) والنتيجة (٨ ـ ٢) لنكمل البرهان .

مثال (٨–٨)

قُطع هرم مساحة قاعدته ٤٥ سم² وارتفاعه ٦ سم بمستوٍ يوازي القاعدة فكانت مساحة المقطع الناتج ٢٠ سم² . كم يبعد المقطع عن الرأس وما نسبة حجمي الهرمين ؟

الحـــل :



شكل (٨ـ٢٨)

(١) مساحة المقطع = $\frac{ك^2}{ع^2}$ × ن حيث

ك هو بعد المقطع عن الرأس م ، ع هو ارتفاع الهرم ،

و ن هي مساحة قاعدته .

إذن (٢) ك² = $\frac{٢٠ \times ٦^2}{٤٥}$ = ١٦ سم²

أي ك = ٤ سم

(٣) حجم الهرم الكبير = $\frac{١}{٣}$ × ٦ × ٤٥

حجم الهرم الصغير = $\frac{١}{٣}$ × ٤ × ٢٠

إذن (٤) نسبة حجم الهرم الصغير إلى الكبير = $\frac{٤ \times ٢٠}{٦ \times ٤٥}$ = $\frac{٨}{٢٧}$

مثال (٨–٩)

م - ا ب حـ هرم ثلاثي فيه |م ا| = ١٠ سم، |ا حـ| = ١٢ سم، |ا ب| = ٦ سم

إذا كان م ا ⊥ ا ب ، م ا ⊥ ا حـ وكانت حـ أ̂ ب = ٤٥° فاحسب حجم الهرم وطول العمود

من حـ إلى الوجه م ا ب

الحـــل :

(١) بما أنّ م ا يعامد ا ب ، ا حـ فإنّ م ا يعامد المستوي ا ب حـ وعليه فإنّ |م ا| ارتفاع الهرم .

(٢) مساحة القاعدة $= \frac{١}{٢} |أب|\,|أجـ| \text{ جا } \widehat{جـ أ ب}$

$= \frac{١}{٢} \times ١٢ \times ٦ \times \frac{١}{\sqrt{٢}}$

$= ١٨\sqrt{٢}$ سم^{٢}

إذن (٣) حجم الهرم $= \frac{١}{٣} \times ١٠ \times ١٨\sqrt{٢} = ٦٠\sqrt{٢}$ سم^{٣}

(٤) اعتبر جـ هي رأس الهرم، م أ ب هي القاعدة

إذا كان ع هو طول العمود من جـ إلى م أ ب

فإن حجم الهرم هو $\frac{١}{٣}$ ع × مساحة △ م أ ب

(٥) مساحة △ م أ ب $= \frac{١}{٢} \times ١٠ \times ٦ = ٣٠$ سم^{٢}

إذن (٦) ع $= \frac{٣ \times ٦٠\sqrt{٢}}{٣٠} = ٦\sqrt{٢}$ سم

شكل (٨-٢٩)

مثال (٨-١٠)

م - أ ب جـ د هرم رباعي قائم طول ضلع قاعدته أ ب جـ د يساوي ٦ سم وارتفاعه |م و| = ٤ سم

احسب أولاً: حجم الهرم، ثانياً: مساحته الجانبية، ثالثاً: قياس الزاوية الزوجية بين القاعدة والوجه م أ ب

الحـــل :

(١) حجم الهرم $= \frac{١}{٣}$ |م و| × مساحة أ ب جـ د

$= \frac{١}{٣} \times ٤ \times ٣٦ = ٤٨$ سم^{٣}

(٢) افرض أنّ م هـ هو العمود على ا ب

في الوجه الجانبي م ا ب . بما أنّ الهرم قائم

فإنَّ هـ هي منتصف القطعة [ا ب] ،

وَ ن هي مركز المربع ا ب حـ ء

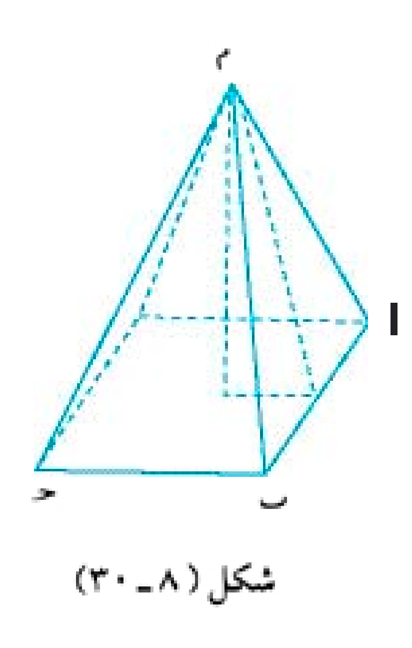
$|م هـ|^2 = |هـ ن|^2 + |م ن|^2$ (نظرية فيثاغورس)

$= ٣^2 + ٤^2$

وعليه $|م هـ| = ٥$ م

فتكون المساحة الجانبية للهرم $= \frac{1}{2} |م هـ| \times$ محيط ا ب حـ ء

$= \frac{1}{2} \times ٥ \times ٢٤ = ٦٠$ م^2



شكل (٨ ـ ٣٠)

(٣) بما أنّ [هـ ن] هي مسقط [م هـ] على القاعدة وعليه هـ ن ⊥ ا ب فإنّ م $\hat{هـ}$ ن زاوية مستوية للزاوية الزوجية بين القاعدة والوجه م ا ب . وحيث إنَّ جا م $\hat{هـ}$ ن $= \frac{٤}{٥}$ فإنَّ قياس الزاوية المطلوبة هو ٨َ ٥٣°.

تعريف (٨ ـ ٢)

إذا قطع هرم بمستوٍ يوازي القاعدة فالجزء المحصور بين المقطع والقاعدة يسمّى هرماً ناقصاً .

في الشكل (٨ ـ ٣١) ا ب حـ ء هـ اَ بَ حَ ءَ هـَ هرم (خماسي) ناقص . لاحظ أنَّ الوجه الجانبي على هيئة شبه منحرف . يسمّى البعد العمودي بين القاعدتين اَ بَ حَ ءَ هـَ ، ا ب حـ ء هـ

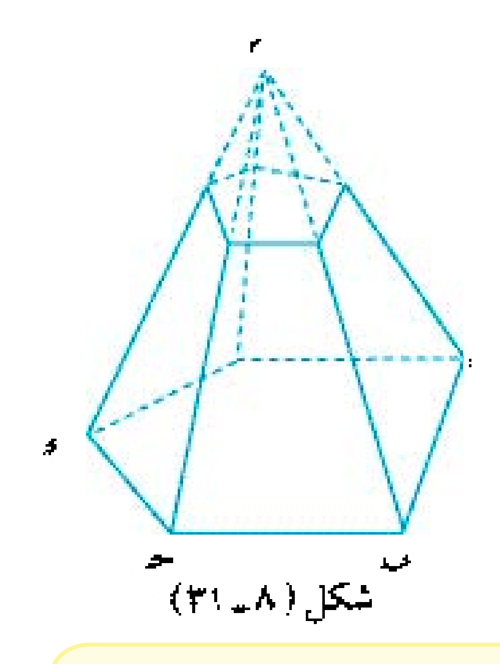
ارتفاعاً للهرم الناقص.

ويسمى الهرم الناقص قائماً إذا كان ناتجاً عن هرم قائم.

في هذه الحالة من اليسير التحقق من أن الأحرف

الجانبية $\{[أ أ'] ، [ب ب'] ، [حـ حـ'] ، [د د'] ، [هـ هـ']\}$

متساوية الأطوال وأن الأوجه الجانبية لها الارتفاع نفسه.



شكل (٨ ـ ٣١)

نظرية (٨ ـ ١٠)

المساحة الجانبية لهرم ناقص قائم = $\frac{1}{2}$ مجموع محيطي القاعدتين في ارتفاع الوجه الجانبي

البرهان : التمرين ١ من التمارين (٨ ـ ٣).

نظرية (٨ ـ ١١)

$$حجم الهرم الناقص = \frac{1}{3} ع \left(ق_1 + ق_2 + \sqrt{ق_1 \, ق_2}\right)$$

حيث ع هو الارتفاع ، $ق_1$ ، $ق_2$ هما مساحتا القاعدتين

البرهـــان :

(١) انظر شكل (٨-٣١). لتكن $ق_١$ هي مساحة أ ب حـ ء هـ و $ق_٢$ هي مساحة أ' ب' حـ' ء' هـ'. افرض أن ك هو ارتفاع الهرم م - أ' ب' حـ' ء' هـ'.

عندئذ يكون ارتفاع الهرم م - أ ب حـ ء هـ هو ك + ع.

(٢) حجم الهرم الناقص $= \frac{١}{٣}(ك + ع)\, ق_١ - \frac{١}{٣} ك\, ق_٢$

$= \frac{١}{٣} ك\, (ق_١ - ق_٢) + \frac{١}{٣} ع\, ق_١$

(٣) يكون $\frac{ك^٢}{(ك + ع)^٢} = \frac{ق_٢}{ق_١}$ (النظرية (٨-٧))

$$\Leftarrow \frac{ك}{ك + ع} = \frac{\sqrt{ق_٢}}{\sqrt{ق_١}}$$

$$\Leftarrow ك = \frac{ع \sqrt{ق_٢}}{\sqrt{ق_١} - \sqrt{ق_٢}}$$

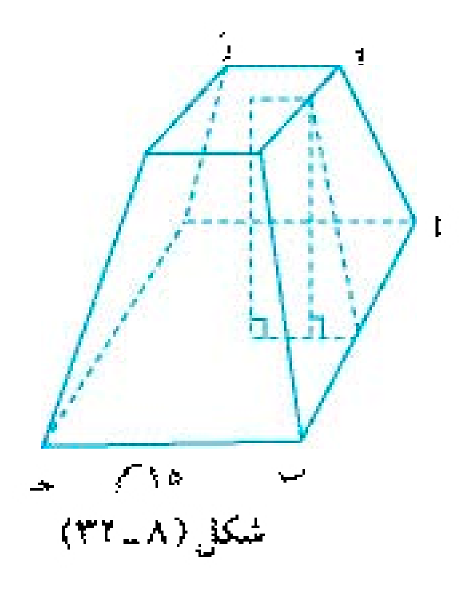
(٤) حجم الهرم الناقص $= \frac{١}{٣} ع \frac{\sqrt{ق_٢}}{\sqrt{ق_١} - \sqrt{ق_٢}} \cdot (ق_١ - ق_٢) + \frac{١}{٣} ع\, ق_١$

$= \frac{١}{٣} ع \left(ق_١ + ق_٢ + \sqrt{ق_١ ق_٢}\right)$

مثال (٨-١١)

في هرم رباعي ناقص وقائم لقاعدتان مربعتان طولا ضلعيهما ٥ م و ٤ م. إذا كان الارتفاع ٦٢ م فاحسب حجم الهرم ومساحته الكلية.

الحـــل :



شكل (٨ ـ ٣٢)

(١) الحجم = $\frac{١}{٣}$ ع (ق١ + ق٢ + $\sqrt{\text{ق١ ق٢}}$)

= $\frac{١}{٣}$ × ١٢ (٢٥ + ٢٢٥ + ٧٥)

= ١٣٠٠ سم³

(٢) لتكن م مركز أ ب جـ د ، مَ مركز أَ بَ جـَ دَ

وافرض أن هـ منتصف [أ ب] ، هـَ منتصف [أَ بَ].

من هـَ أنزل [هـَ ن] ليعامد [م هـ].

|هـ ن| = |م هـ| − |م ن| = |م هـ| − |مَ هـَ| = ٧,٥ − ٢,٥ = ٥ سم.

⟸ |هـ هـَ|² = |هـَ ن|² + |هـ ن|² = ١٢² + ٥² = ١٦٩.

⟸ |هـ هـَ| = ١٣ سم وهو ارتفاع الوجه الجانبي

المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ مجموع محيطي القاعدتين في ارتفاع الوجه الجانبي

= $\frac{١}{٢}$ (٢٠ + ٦٠) × ١٣ = ٥٢٠ سم²

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

= ٥٢٠ + ٢٥ + ٢٢٥ = ٧٧٠ سم²

تمارين (٨ - ٣)

(١) أورد تفاصيل برهان النظرية (٨ - ١٠)

(٢) في هرم ثلاثي الارتفاع ١٥ سم والقاعدة مثلث أضلاعه ٧ سم ، ١٧ سم ، ٤ $\sqrt{15}$ سم . فما حجمه ؟

(٣) احسب حجم هرم فيه الارتفاع ١٦ سم والقاعدة معيّن طولا قطريه ٦ سم ، ٨ سم .

(٤) قطع هرم مساحة قاعدته ١٩٦ سم² بمستوٍ يوازي القاعدة ويبعد عنها مسافة ١٠ سم . إذا كانت مساحة المقطع الناتج ١٤٤ سم² فاحسب ارتفاع الهرم وحجمه .

(٥) في هرم ثلاثي القاعدة مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه ١٢ سم ؛ وطول كل من الأحرف الجانبية ٨ سم . احسب أولاً ارتفاع الهرم ، ثانياً حجمه ، ثالثاً مساحته الكلية .

(٦) م . أ ب جـ د هرم رباعي قائم طول ضلع قاعدته ل . إذا كان طول الحرف الجانبي أيضاً ل فاحسب أولاً حجم الهرم وثانياً مساحته الجانبية .

(٧) م . أ ب جـ هرم ثلاثي قائم طول ضلع قاعدته ١٢ سم . إذا كان قياس الزاوية بين الوجهين أ ب جـ ، م ب جـ = ٦٠° فاحسب حجم الهرم .

(٨) ما حجم هرم سداسي قائم ارتفاعه ٨ $\sqrt{37}$ سم وطول ضلع قاعدته ٤ سم .

(٩) أ ب جـ أَ بَ جـَ منشور ثلاثي قائم . قسمنا كلاً من [أ أَ] ، [ب بَ] ، [جـ جـَ] إلى

ثلاث قطع متطابقة بواسطة النقاط د ز هـ ، م و ؟ ، ر و ط على التوالي .

إذا فصلنا من المنشور الأهرامات أ [illegible] فاحسب نسبة حجم الجزء الباقي من المنشور إلى حجم المنشور .

(١٠) في هرم ناقص الارتفاع ١٢ سم والقاعدتان مربعتان ضلعاهما ٦ سم ، ١٦ سم . احسب حجم الهرم الناقص . ما حجم الهرم الكامل ؟

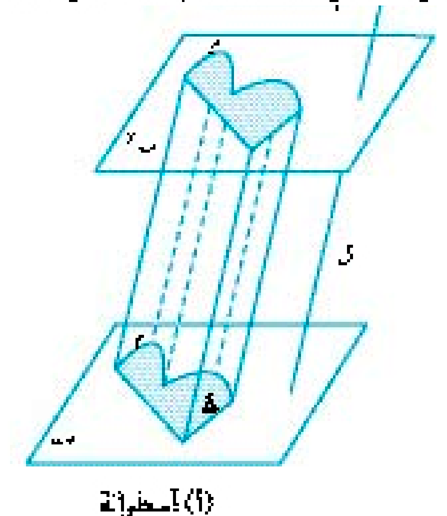
(١١) المساحة الكلية لهرم سداسي ناقص وقائم ٢٧٦ $\sqrt{3}$ سم² . إذا كان طولا ضلعي قاعدتيه ٦ سم ، ٨ سم فاحسب ارتفاع الوجه الجانبي .

(١٢) في هرم رباعي ناقص وقائم القاعدتان مربعتان ضلعاهما ٦ سم ، ١٨ سم . إذا كان ارتفاع الوجه الجانبي ١٠ سم فاحسب المساحة الكلية للهرم الناقص وحجمه . ما هو ارتفاع الهرم الكامل ؟

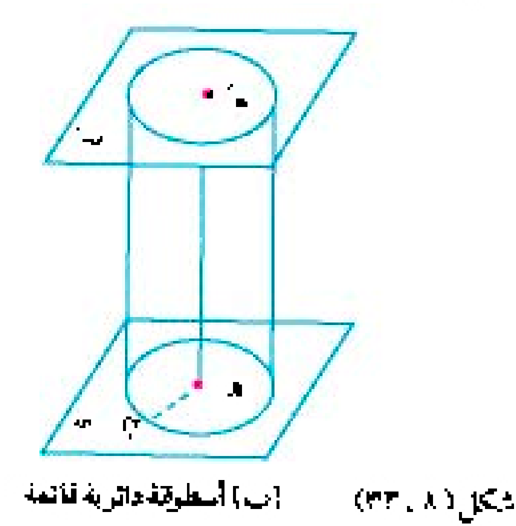
٨ – ٤ الأسطوانة والمخروط

(١) لقد لاحظت إمكانية استخدام طريقة إنشاء منشور لإنشاء مجسمات هندسية وإن لم تكن القاعدة مضلعاً. خذ شكلاً مستوياً ط محدوداً بمنحنٍ مغلق في مستوٍ ما ح وافرض أن ح′ مستوٍ موازٍ للمستوي ح. إذا كان ل مستقيماً يلاقي ح في نقطة واحدة، فإننا نسمي المجسم الناتج من تحريك ط موازياً لنفسه في اتجاه ل حتى يلاقي ح′ أسطوانة، وهو في الواقع المجسم المحدود بالمستويين والسطح المكون من اتحاد القطع المستقيمة [illegible] حيث [illegible] تقع على محيط ط، [illegible] ∈ ح′، [illegible] ∥ ل. (انظر شكل (٨ ـ ٣٣) / أ). يسمى كل من هذه القطع المستقيمة راسماً للأسطوانة ويسمى كل من السطحين ط وتقاطع الأسطوانة مع ح′ قاعدة لها. أما ارتفاعها فهو المسافة العمودية بين ح و ح′. هذا ونسمي الأسطوانة قائمة إذا كان ل ⊥ ط وإلا سميت مائلة.

في هذا المجال سنقتصر دراستنا على الحالة التي تكون فيها القاعدة ط محدودة بدائرة وعندئذ نسمي الأسطوانة دائرية والمستقيم الذي يصل بين مركزي قاعدتيها محوراً. وإذا كانت الأسطوانة دائرية وقائمة في آن معاً سميت أسطوانة دائرية قائمة.



(أ) أسطوانة

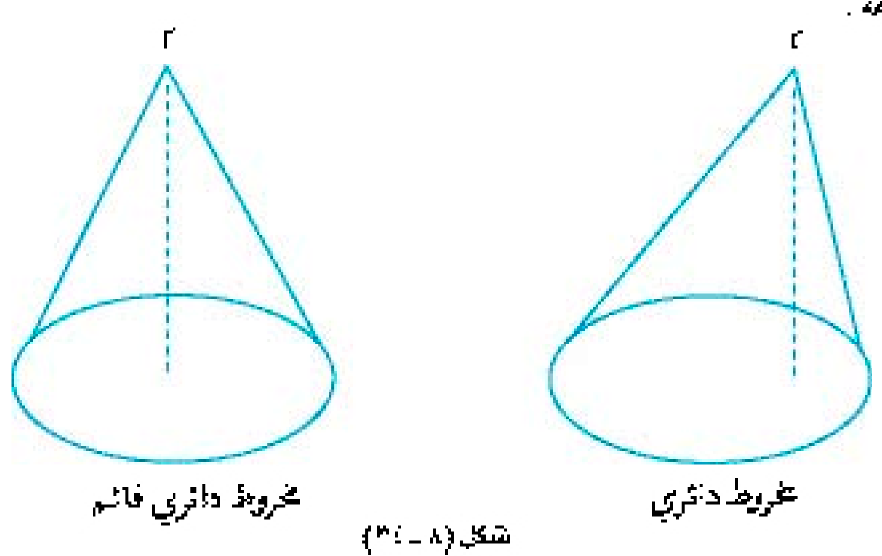


(ب) أسطوانة دائرية قائمة

شكل (٨ ـ ٣٣)

في الشكل (٨ ـ ٣٣/ب) أسطوانة دائرية قائمة محورها [أ هـ] ونصف قطرها [هـ ج].

(٢) بمحاكاة تعريف الهرم نستطيع أن نعرّف المخروط الدائري. خذ ط ليكون الجزء من المستوي س المحدود بدائرة مركزها هـ وافرض أن م نقطة خارج س. تسمّى اتحاد كل القطع المستقيمة [م ن] حيث ن ∈ ط مخروطاً دائرياً. إذا كانت ن نقطة في محيط الدائرة فإن [م ن] تسمّى راسماً. يُدعى المخروط دائرياً قائماً إذا كان م هـ ⊥ س. وفي هذه الحالة يكون لكل الرواسم الطول نفسه ونسمّي م هـ محور المخروط. النقطة م تسمّى رأس المخروط وبعدها عن س يسمّى ارتفاعه.



شكل (٨ ـ ٣٤)

بإجراء التعديلات المناسبة في براهين النظريات المماثلة في حالة المنشور والهرم نستطيع التحقق من صحة النظريتين التاليتين.

نظرية (٨ ـ ١٢)

مقطع الأسطوانة الدائرية بمستوٍ يوازي قاعدتها هو قرص دائري مساحته تساوي مساحة القاعدة.

نظرية (٨ ـ ١٣)

إذا قطعنا مخروطاً ارتفاعه ع بمستوٍ يوازي القاعدة ويبعد ك عن رأس المخروط فالمقطع الناتج

قرص دائري و $\frac{\text{مساحة المقطع}}{\text{مساحة القاعدة}} = \frac{ك^2}{ع^2}$

بالاستعانة بمنشور في حالة الأسطوانة وهرم في حالة المخروط واستخدام مسلّمة الحجم الثانية نستطيع أن نحصل على قانوني الحجم التاليين . ر يرمز على الدوام لنصف قطر القاعدة وَ ع للارتفاع

نظرية (٨ ـ ١٤)

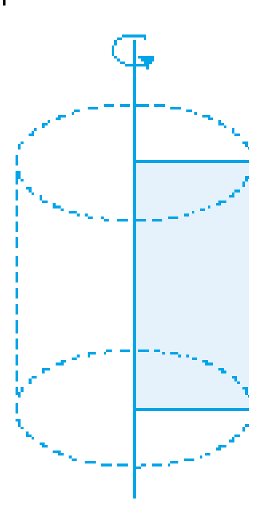
حجم الأسطوانة الدائرية = مساحة القاعدة في الارتفاع = ط $ر^2$ ع

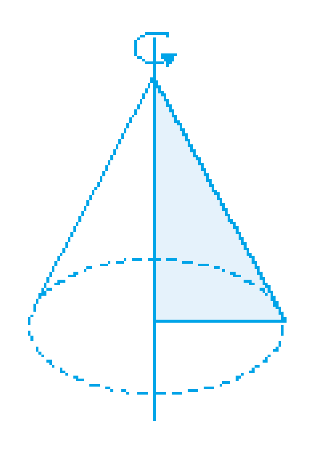
نظرية (٨ ـ ١٥)

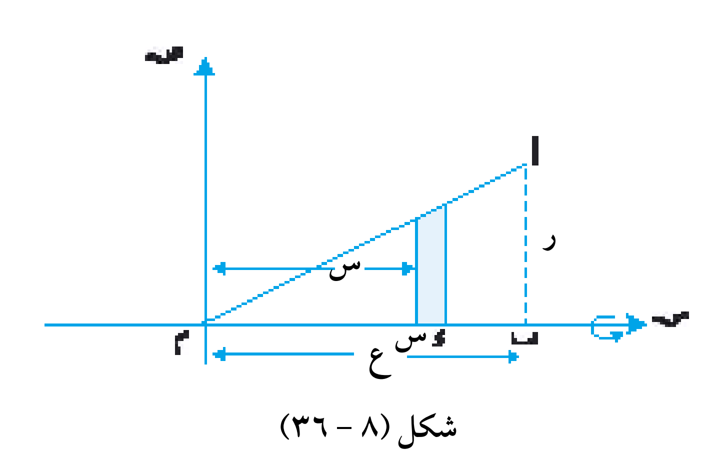
حجم المخروط الدائري = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة في الارتفاع = $\frac{1}{3}$ ط $ر^2$ ع

ملحوظة (٨ – ٣)

يمكن تعريف الأسطوانة الدائرية القائمة على أنها الجسم الناتج من دوران سطح مستطيل حول أحد أضلاعه دورة كاملة . ويمكن تعريف المخروط الدائري القائم على أنه الجسم الناتج من دوران مثلث قائم الزاوية حول أحد ضلعي الزاوية القائمة دورة كاملة .







شكل (٨ – ٣٦)

لنحسب حجم المخروط الناتج من دوران المثلث م أ ب حول م ص :

معادلة المستقيم م أ هي : $ص = \frac{نق}{ع} س$ (لماذا؟)

$$إذن الحجم = \int_{0}^{ع} ط \left(\frac{نق}{ع} س\right)^{2} ءس = \frac{ط نق^{2}}{ع^{2}} \int_{0}^{ع} س^{2} ءس$$

$$= \frac{ط نق^{2}}{ع^{2}} \left[\frac{س^{3}}{3}\right]_{0}^{ع} = \frac{1}{3} ط نق^{2} ع$$

= $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة في الارتفاع ، وهذا يوافق النظرية (٨ ـ ١٥)

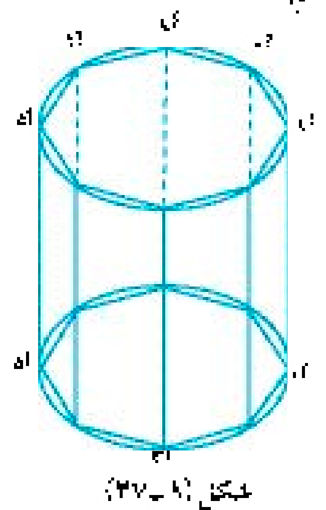
ملحوظة (٨ – ٤)

في الشكل (٨ ـ ٣٦) تسمى الزاوية ب م أ الزاوية نصف الرأسية للمخروط .

ملحوظة (٨ – ٥)

بالإمكان إثبات قانون حجم الأسطوانة الدائرية عن طريق تقريبها بمناشير .

نقسم دائرتي القاعدة إلى أقواس متطابقة بواسطة النقاط أ١ ، أ٢ ، ... ، أن



شكل (٨ ـ ٣٧)

والنقاط أ'١ ، أ'٢ ، ... ، أ'ن عندما تكبر ن وتتناهى إلى ∞ فإن المنشور أ١ ... أن أ'١ ... أ'ن يتناهى إلى الأسطوانة وقاعدته أ١ ... أن تتناهى إلى قاعدة الأسطوانة . وبما أن ارتفاع المنشور هو ارتفاع الأسطوانة ع فإننا نستنتج أن حجم الأسطوانة = نها حجم المنشور

= نهـا [مساحة قاعدة المنشور × ع]

= (نهـا مساحة قاعدة المنشور) × ع

= مساحة قاعدة الأسطوانة × ع

على نسق مماثل نستطيع التوصل إلى قانون حجم المخروط الدائري بتقريبه بواسطة أهرامات تتناهى إليه. نترك التفاصيل للطالب.

تزودنا فكرة تقريب الأسطوانة بمنشور والمخروط بهرم بطريقة لحساب مساحة السطح الجانبي لكل من الأسطوانة الدائرية القائمة والمخروط الدائري القائم.

نظرية (٨ ـ ١٦)

مساحة السطح الجانبي للأسطوانة الدائرية القائمة = محيط القاعدة في الارتفاع = ٢ ط ر ع

المعطيات : أسطوانة نصف قطرها ر ، وارتفاعها ع .

المطلوب إثباته : مساحة السطح الجانبي = ٢ ط ر ع

البرهـــان : انظر الشكل (٨ ـ ٣٧)

(١) مساحة السطح الجانبي للأسطوانة = نهـا مساحة سطح المنشور الجانبي

و محيط قاعدة الأسطوانة = نهـا محيط قاعدة المنشور

∵ ارتفاع الأسطوانة = ارتفاع المنشور = ع

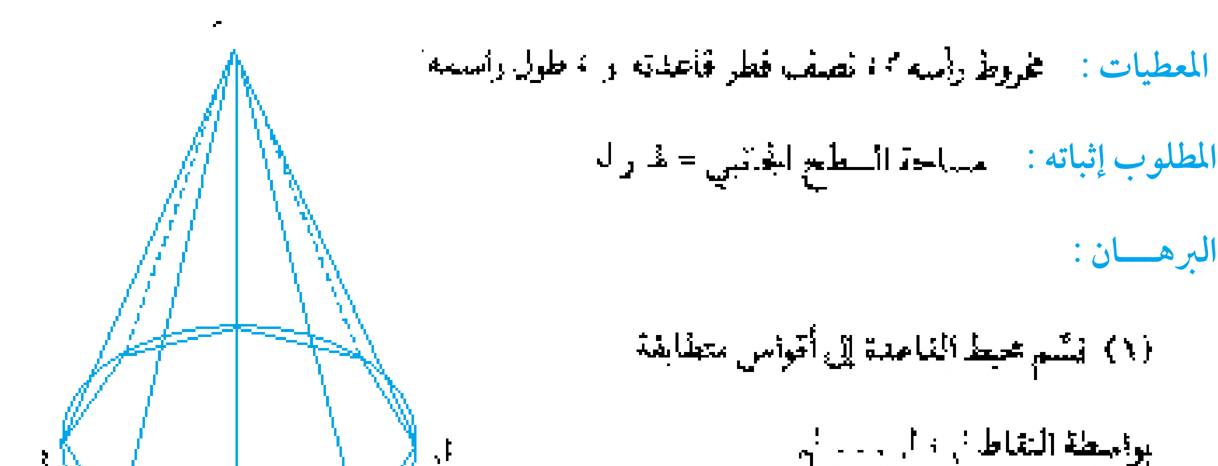
لكن (٢) مساحة السطح الجانبي للمنشور = محيط قاعدة المنشور × ع

إذن (٣) مساحة السطح الجانبي للأسطوانة = محيط قاعدة الأسطوانة × ع

= ٢ ط نق ع

نظرية (٨ ـ ٤٧)

مساحة السطح الجانبي للمخروط الدائري القائم = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة في طول الراسم = ط نق ل



شكل (٨ ـ ٣٨)

المعطيات : مخروط رأسه م، نق نصف قطر قاعدته و ل طول راسمه

المطلوب إثباته : مساحة السطح الجانبي = ط نق ل

البرهـــان :

(١) نقسم محيط القاعدة إلى أقواس متطابقة

بواسطة النقاط $أ_١$ ، $أ_٢$ ، . . . $أ_ن$

(٢) الهرم م − $أ_١$ $أ_٢$ . . . $أ_ن$ يتناهى إلى المخروط

وقاعدته تتناهى إلى قاعدة المخروط عندما ن ← ∞

(٣) بما أن الهرم م − $أ_١$ $أ_٢$ . . . $أ_ن$ قائم ضمن نظرية (٨ ـ ٥)

نجد أنّ مساحة سطوح الهرم الجانبية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × ارتفاع الوجه الجانبي

(إ) عندما ن ← ∞ فإنّ ارتفاع الوجه الجانبي ← طول الراسم

و محيط قاعدة المنشور ← محيط قاعدة المخروط

إذن (٤) مساحة السطح الجانبي للمخروط = $\frac{١}{٢}$ محيط قاعدته × طول الراسم = ط ر ل .

تدريب (٨-٩)

احسب الحجم والمساحة الكلية لأسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ١٠سم وقطر قاعدتها ٨سم .

تدريب (٨-١٠)

طويت ورقة مستطيلة بعداها ٢٠سم ، ٤٤سم حيث أصبحت أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ٢٠سم . احسب حجمها ومساحة سطحها الجانبي . إذا قطعت الأسطوانة بمستوٍ يحتوي محورها فما مساحة المقطع ؟

تدريب (٨-١١)

مخروط دائري قائم طول قطر قاعدته ١٤سم وطول راسمه ١١سم . احسب ارتفاعه ، حجمه ، ومساحته الكلية .

تدريب (٨-١٢)

إذا قطعنا مخروطاً دائرياً بمستوٍ يوازي القاعدة

فإننا نسمي الجزء المحصور بين المقطع والقاعدة

شكل (٨-٣٩)

مخروطاً ناقصاً (أو جذع مخروط) ونعرّف ارتفاعه على أنه البعد بين القاعدتين

إذا كان $ر_1$ ، $ر_2$ هما نصفا قطري القاعدتين و ع هو الارتفاع فأثبت أن حجم المخروط الناقص = $\frac{1}{3}$ ط ع $(ر_1^2 + ر_2^2 + ر_1 ر_2)$.

إذا كان المخروط قائماً فأعط قانوناً للمساحة الجانبية للمخروط.

مثال (٨-١٢)

حشرت أسطوانة دائرية قائمة داخل مخروط دائري قائم بحيث ارتكزت إحدى قاعدتيها على قاعدة المخروط ومسّ محيط قاعدتها الثانية السطح الجانبي للمخروط.

إذا كان قطر الأسطوانة ٧ سم وارتفاعها ١٢ سم وكان ارتفاع المخروط ٢٤ سم فاحسب حجم المخروط ومساحته الكلية.

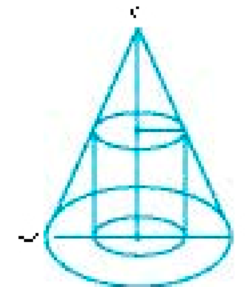


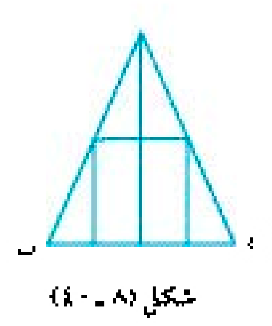
الحل :

(أ) من تشابه المثلثين م هـ د ، م أ ب نجد أن $\frac{|أب|}{|هـ د|} = \frac{|م أ|}{|م هـ|}$

وطول قطر المخروط |أب| = $\frac{|هـ د| \times |م أ|}{|م هـ|}$

= $\frac{٧ \times ٢٤}{٢٤ - ١٢}$ = ١٤ سم





شكل (٨ - ٤)

(٢) حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ ط ر^{٢} ع

$= \frac{١}{٣} \times \frac{٢٢}{٧} \times ٧^{٢} \times ٢٤ = ١٢٣٢$ م^{٣}

(٣) طول راسم المخروط ل = $\sqrt{٧^{٢} + ٢٤^{٢}} = ٢٥$ م

إذن المساحة الجانبية للمخروط = ط ر ل

$= \frac{٢٢}{٧} \times ٧ \times ٢٥ = ٥٥٠$ م^{٢}

لكن المساحة الكلية للمخروط = المساحة الجانبية + ط ر^{٢}

إذن المساحة الكلية للمخروط = ٥٥٠ + ١٥٤ = ٧٠٤ م^{٢}

تمارين (٨ - ٤)

(١) إذا كانت م نقطة على محور أسطوانة دائرية قائمة فأثبت أنّ لها البعد نفسه عن جميع النقاط على محيط القاعدة.

(٢) طول أنبوبة معدنية على هيئة أسطوانة دائرية قائمة ١م. إذا كان قطرها الخارجي ٤٠سم والداخلي ٣٠سم فما حجم المعدن؟

(٣) إذا كان ارتفاع أسطوانة دائرية قائمة يساوي ثلاثة أمثال قطرها فما مساحتها الكلية بدلالة حجمها؟

(٤) قُطعت أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ٣٨سم بمستوٍ يمر بمحورها م ن فكانت مساحة المقطع الناتج ٥٣٢سم². احسب حجم الأسطوانة ومساحة سطحها الجانبي ($ط = \frac{٢٢}{٧}$)

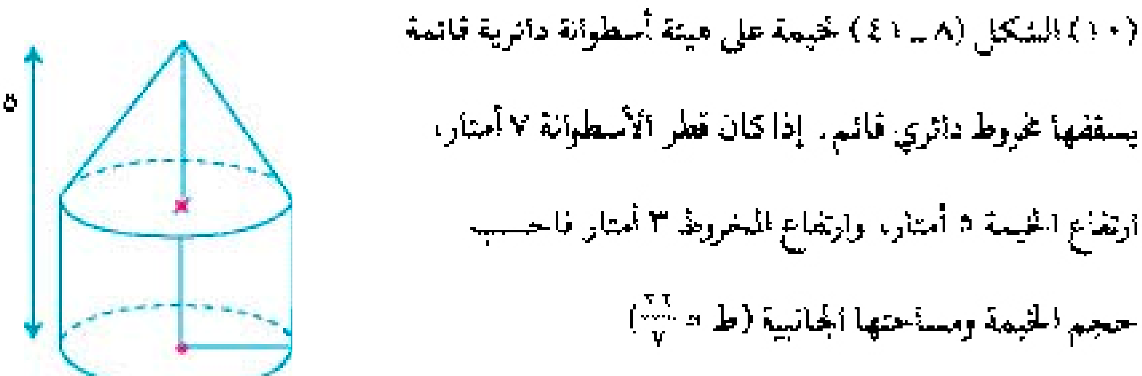
(٥) احسب نسبة حجمي الأسطوانتين الممكن تكوينهما بطي قطعة ورق مستطيلة أبعادها ٢٠سم، ٣٠سم. ما هي النسبة لو كانت الأبعاد س سم، ص سم؟

(٦) في مخروط دائري قائم طول نصف قطر القاعدة ٨سم وطول الراسم ١٧سم. احسب الحجم والمساحة الكلية.

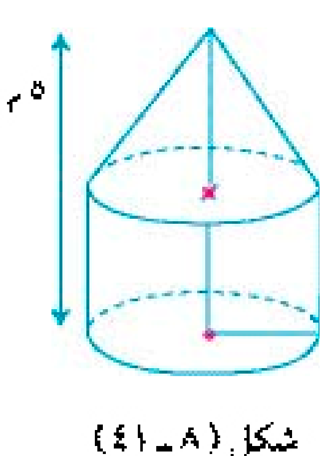
(٧) طوي قطاع دائري نصف قطر دائرته ١٥سم وقياس زاويته المركزية ١٢٠° ليصبح مخروطاً دائريا قائماً. احسب أولاً: محيط قاعدة المخروط، ثانياً: ارتفاع المخروط، ثالثاً: حجم المخروط.

(٨) مخروط دائري مائل حجمه ٧٧٠ سم^٣ وقطر قاعدته ٧ سم . إذا كان البعد بين رأس المخروط ومركز القاعدة ١٢٠ سم فاحسب قياس الزاوية بين المحور والقاعدة . (ط = $\frac{٢٢}{٧}$) .

(٩) يزيد طول راسم أسطوانة دائرية مائلة بمعدل ٠,١ سم / ثانية وينقص نصف قطر قاعدتها بمعدل ٠,٠٠٥ سم / ثانية . إذا كان محورها يميل على القاعدة بزاوية قياسها ٦٠° فاحسب معدّل تغيُّر الحجم عندما يكون القطر ٤ سم وطول الراسم ١٠ سم .



(١٠) الشكل (٨ ـ ٤١) خيمة على هيئة أسطوانة دائرية قائمة يسقفها مخروط دائري قائم . إذا كان قطر الأسطوانة ٧ أمتار ارتفاع الخيمة ٥ أمتار وارتفاع المخروط ٣ أمتار فاحسب حجم الخيمة ومساحتها الجانبية (ط = $\frac{٢٢}{٧}$)



شكل (٨ ـ ٤١)

(١١) أورد تفاصيل برهان نظرية (٨ ـ ١٢)

(١٢) أورد تفاصيل برهان نظرية (٨ ـ ١٣)

(١٣) أورد تفاصيل برهان نظرية (٨ ـ ١٤) (من دون استخدام التقريب بمناشير)

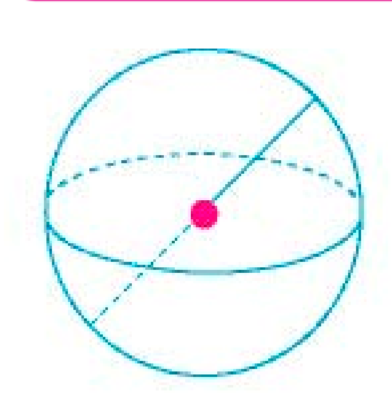
(١٤) أورد تفاصيل برهان نظرية (٨ ـ ١٥) .

٨ – ٥ الكــرة

تعريف (٨ ـ ٣)

الكرة هي السطح المكون من جميع نقاط الفراغ التي يبعد كلٌّ منها عن نقطة معينة م بعداً ثابتاً نق .

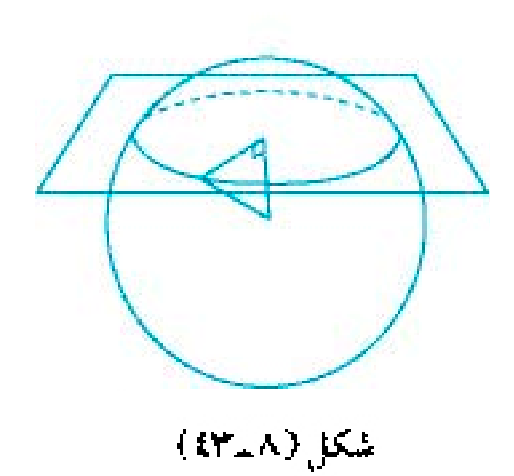
تسمى النقطة م مركز الكرة والبعد الثابت نق نصف قطرها . الشكل (٨ ـ ٤٢) يمثّل كرة مركزها م ونصف قطرها |م أ| = نق . ثم يمدّ [أ م] على استقامته حتى يلاقي الكرة في النقطة ب . ما طول [م ب]؟ ما طول [أ ب]؟ لعلك توصلت إلى أنّ |أ ب| = ٢نق . نحن نسميه قطر الكرة .



أوضاع مستوٍ بالنسبة إلى كرة

(أ) الشكل (٨-٤٣) يبيّن الكرة ك (م ، نق) ومستوٍ س يبعد عن م مسافة ل حيث ٠ < ل < نق .

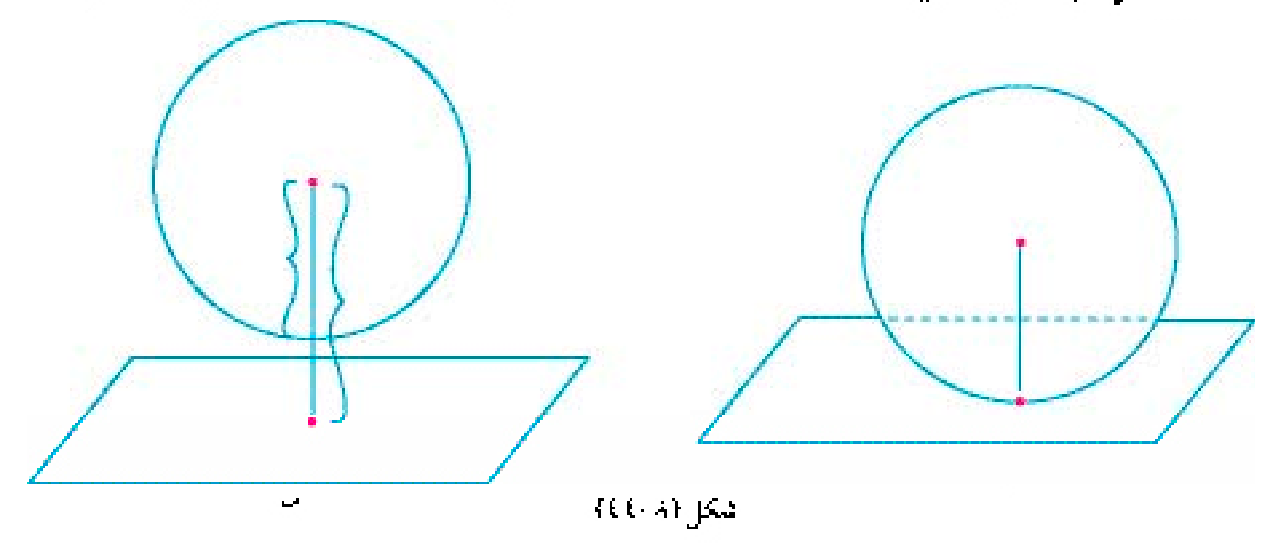
لتكن أ أي نقطة في تقاطع س والكرة ، ولنفرض أن هـ موقع العمود النازل من م على س . لعلّه واضح لديك أنّ △ م هـ أ قائم في هـ وأنّ |هـ أ| = $\sqrt{نق^2 - ل^2}$ ثابتاً ، أي أنّ المجموعة ك ∩ س هي دائرة مركزها هـ ونصف قطرها نق = $\sqrt{نق^2 - ل^2}$.



شكل (٨ـ٤٣)

(٢) لو فرضنا أننا حركنا المستوي س حتى أصبح البعد ل = نق فإن ك ∩ س = {هـ} وحينئذ نقول إن المستوي س يمس الكرة ك في هـ .

(٣) لو فرضنا أننا واصلنا تحريك س بحيث تصبح ل > نق فحينئذ يكون نق² − ل² < ٠ وبالتالي لن توجد أي نقطة مشتركة بين ك و س ، أي أن ك ∩ س = ∅ كما في الشكل



شكل (٨-٤٤)

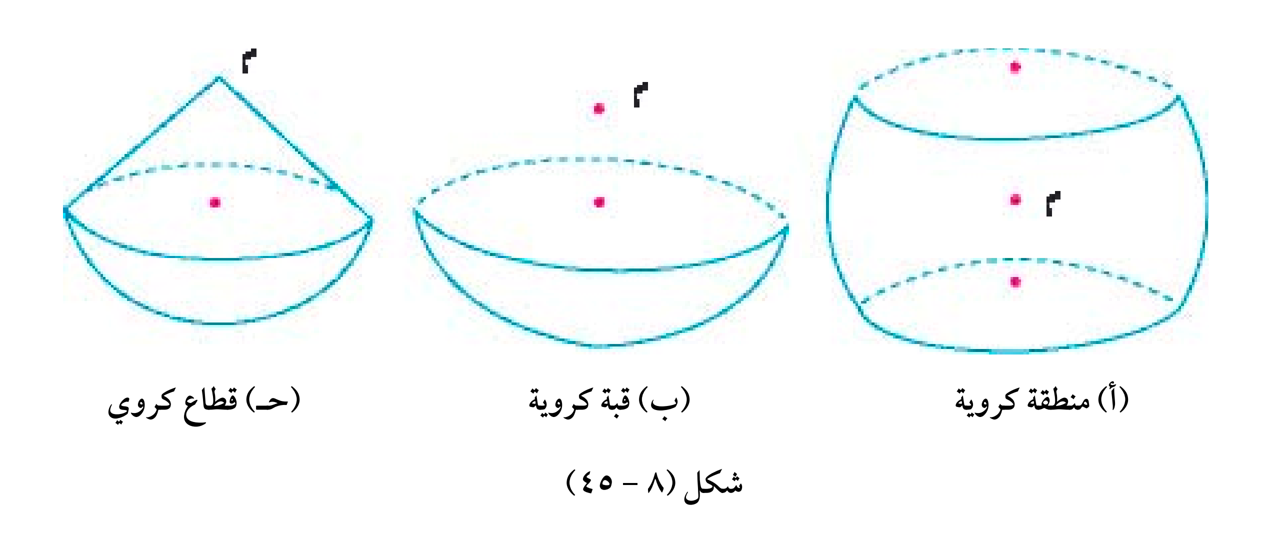
(٤) عندما ل = ٠ فإن المستوي س يمر بمركز الكرة م والدائرة الناتجة من تقاطع المستوي والكرة هي الدائرة (م ، نق) ذات المركز م ونصف القطر نق وهي أكبر دائرة ترسم على الكرة (ولذا ندعوها **دائرة عظمى**) .

تعاريف :

(١) إذا قطعت كرة بمستويين متوازيين فإننا نسمي الجزء المحصور من الكرة بين المقطعين **منطقة كروية** وكلاً من المقطعين قاعدة لها ونسمي المجسم الذي تحده المنطقة الكروية والقاعدتان **قطعة كروية** . أما ارتفاع المنطقة الكروية فهو البعد بين القاعدتين .

(٢) إذا كان أحد المستويين مماسا للكرة فإنَّ المنطقة الكروية تسمّى حينئذ قبّة كروية .

(٣) القطاع الكروي نعني به المجسّم المحصور بقبة كروية ومخروط دائري قائم رأسه مركز الكرة وقاعدته هي قاعدة القبة .



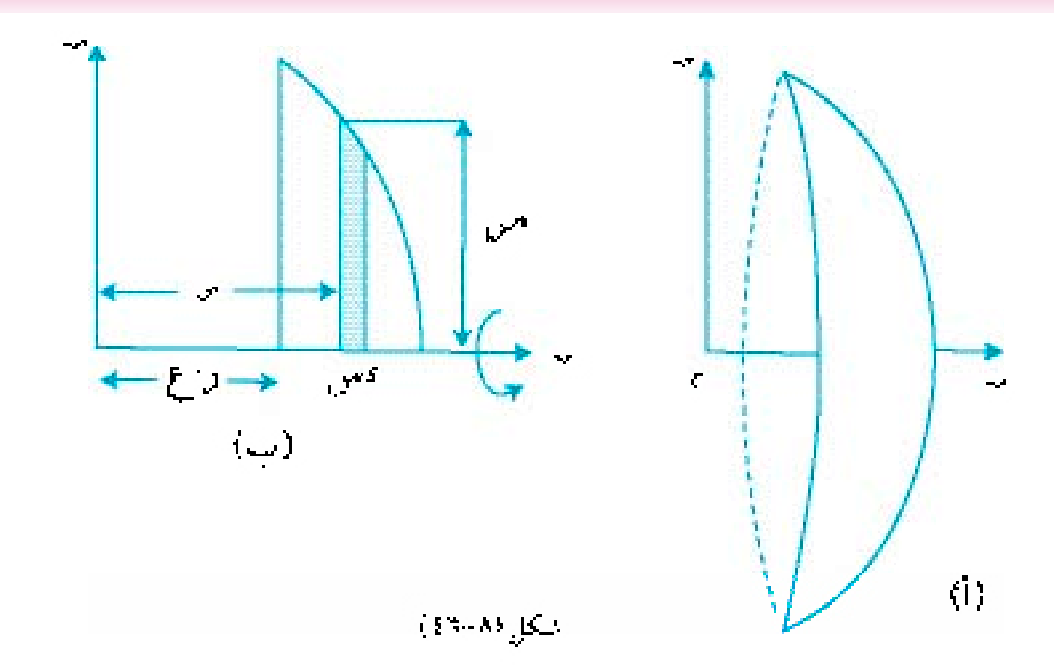
(حـ) قطاع كروي (ب) قبة كروية (أ) منطقة كروية

شكل (٨ – ٤٥)

فيما يأتي عندما نتحدث عن حجم الكرة (أو القبة الكروية) فإنّنا نعني حجم المجسّم الذي يحدّه سطح الكرة (أو سطح القبّة) .

نظرية (٨–١٨)

إذا اقتطعت من كرة نصف قطرها $نق$ قبة كروية إرتفاعها $ع$ فإنَّ حجم القبة الكروية $= \frac{ط}{٣} ع^{٢} (٣نق - ع)$.



شكل (٨-٤٦)

البرهـــان :

(١) الشكل (٨-٤٦/أ) يبيّن القبة الكروية. باعتبار مركز الكرة م نقطة الأصل، ارسم محورين إحداثيين م س، م ص بحيث يصبح م س محور تماثل القبة. لاحظ أنّ القبة تنشأ عن دوران القطعة المحصورة بين الدائرة $س^2 + ص^2 = نق^2$ والمستقيمين $س = نق - ع$، $س = نق$ حول المحور م س. (انظر شكل (٨-٤٦/ب).

(٢) من حساب التكامل نعلم أنّ الحجم الناتج من الدوران

$$ح = \int_{نق-ع}^{نق} ط\, ص^2\, ء س$$

$$= \int_{نق-ع}^{نق} ط\, (نق^2 - س^2)\, ء س$$

$$= ط \left[نق^2 س - \frac{س^3}{3} \right]_{نق-ع}^{نق}$$

$$= \frac{ط}{3}\, ع^2\, (3نق - ع)$$

نتيجة (٨ – ٣)

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ ط ر^{٣} حيث ر هو نصف قطرها .

البرهــان :

(١) لاحظ أنَّ نصف الكرة قبة كروية ارتفاعها ر ، وعليه من النظرية (٨–١٨) نجد أن

حجم نصف الكرة = $\frac{ط}{٣}$ ر^{٢} (٣ر − ر) = $\frac{٢}{٣}$ ط ر^{٣}

إذن (٢) حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ ط ر^{٣} .

نتيجة (٨ – ٤)

في كرة نصف قطرها ر يكون حجم القطاع الكروي القائم على قبة كروية ارتفاعها ع هو $\frac{٢}{٣}$ ط ر^{٢} ع .

البرهــان :

(١) حجم القطاع الكروي = حجم القبة الكروية + حجم المخروط الدائري القائم .

(٢) ارتفاع المخروط = ر − ع

نصف قطر المخروط = $\sqrt{\text{ر}^{٢} - (\text{ر} - \text{ع})^{٢}}$.

إذن حجم المخروط = $\frac{ط}{٣}$ [ر^{٢} − (ر − ع)^{٢}] (ر − ع) .

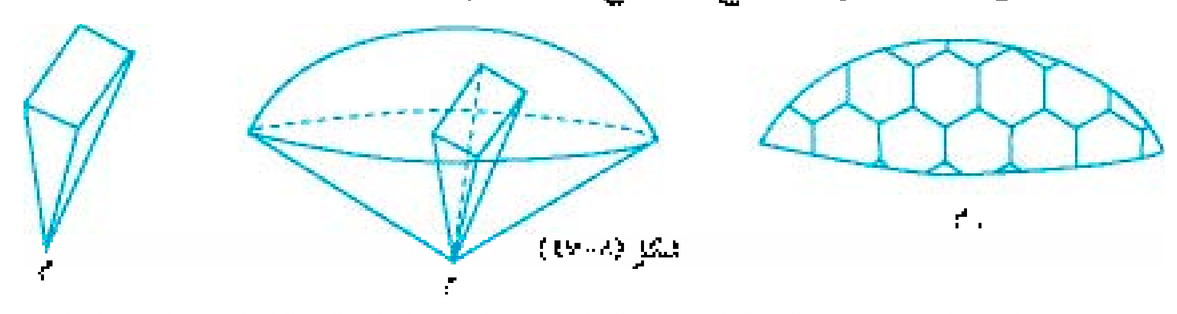
(٣) من النظرية (٨–١٨) نستنتج أنَّ

حجم القطاع = $\frac{ط}{٣}$ ع^{٢} (٣ر − ع) + $\frac{ط}{٣}$ [ر^{٢} − (ر − ع)^{٢}] (ر − ع) .

$= \frac{٢}{٣}\,\text{ط}\,\text{ر}^{٢}\,\text{ع}$

لإيجاد قانون لمساحة القبة الكروية نقدّم الحجة التالية :

نقسم القبة إلى أجزاء كثيرة وصغيرة بدرجة تسمح باعتبارها مضلعات ثم نصل رؤوس هذه المضلعات بمركز الكرة فنحصل على أهرامات تغطي تقريبا القطاع الكروي القائم على القبة. (انظر شكل ٨-٢٧). في الواقع مجموع حجوم هذه الأهرامات يتناهى



شكل (٨-٢٧)

إلى حجم القطاع الكروي عندما تتزايد أعدادها إلى ∞ وتتناقص أبعاد قاعدة كل منها إلى الصفر. على هذا فإنّ

$$\text{حجم القطاع الكروي} = \text{نهـــا}\ \frac{١}{٣}\left(\text{ق}_{١} + \text{ق}_{٢} + \dots + \text{ق}_{\text{ن}}\right)\text{ر}$$

حيث $\text{ق}_{١}$، $\text{ق}_{٢}$، ...، $\text{ق}_{\text{ن}}$ هي مساحات قواعد الأهرامات و ر هو نصف قطر الكرة.

وبما أنّ $\text{ق}_{١} + \text{ق}_{٢} + \dots + \text{ق}_{\text{ن}}$ يتناهى إلى مساحة القبة ن فإننا نستنتج أنّ

$$\text{حجم القطاع الكروي} = \frac{١}{٣}\,\text{ن}\,\text{ر}$$

وإذا كان ع هو ارتفاع القبة الكروية يكون لدينا من النتيجة (٨-٤):

$$\frac{٢}{٣}\,\text{ط}\,\text{ر}^{٢}\,\text{ع} = \frac{١}{٣}\,\text{ن}\,\text{ر} .$$

أي $\text{ن} = ٢\,\text{ط}\,\text{ر}\,\text{ع}$

بهذا نكون قد قدمنا برهاناً للنظرية التالية :

نظرية (٨-١٩)

في كرة نصف قطرها س تكون مساحة قبة كروية ارتفاعها ع هي ٢ ط س ع .

نتيجة (٨ - ٥)

مساحة كرة نصف قطرها ر = ٤ ط ر²

(أي أربعة أمثال مساحة دائرة عظمى في الكرة) .

البرهــــان : تدريب

تدريب (٨-١٣)

استخلص قانوناً لكل ما يأتي :

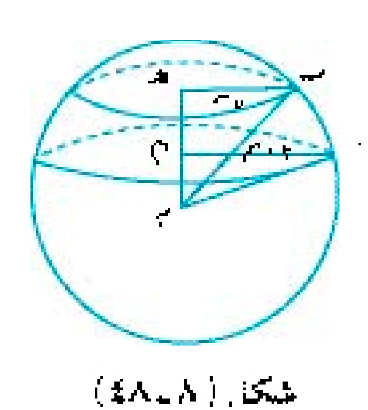
(أ) مساحة سطح القطاع الكروي .

(ب) مساحة سطح المنطقة الكروية ذات الارتفاع ع .

مثال (٨-١٣)

قطعت كرة بمستويين متوازيين يقعان في الجهة نفسها من المركز فكان قطرا المقطعين الناتجين ١٠ سم ، ٢٤ سم ، وكان البعد بين المقطعين ٧ سم . أحسب حجم الكرة ، وحجم القطعة الكروية .

الحـــل :



شكل (٨ ـ ٤٨)

(١) لتكن نق هي نصف قطر الكرة. من نظرية فيثاغورس على △ م أ ب نجد أن

نق² = ١٤٤ + |م أ|² ومنها على △ م جـ هـ نجد أن

نق² = ٢٥ + |م هـ|².

(٢) وبما أن |م هـ| = |م أ| + ٧

فإن نق² = ٢٥ + (|م أ| + ٧)² = ٢٥ + |م أ|² + ١٤ |م أ| + ٤٩.

(٣) ومن المساواتين في الخطوة (١) نستنتج أن

١٤٤ + |م أ|² = ٧٤ + |م أ|² + ١٤ |م أ|

⇐ |م أ| = ٥ سم

⇐ نق² = ١٤٤ + ٢٥ = ١٦٩

⇐ نق = ١٣ سم

(٤) حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ ط نق³ = $\frac{٨٧٨٨}{٣}$ ط سم³

(٥) حجم القطعة الكروية = الفرق بين حجمي القبتين

ارتفاع القبة الكبيرة = نق − |م أ| = ٨ سم

إذن حجم القبة الكبيرة = $\frac{ط}{٣}$ × ٦٤ (٣٩ − ٨)

= $\frac{١٩٨٤}{٣}$ ط سم³

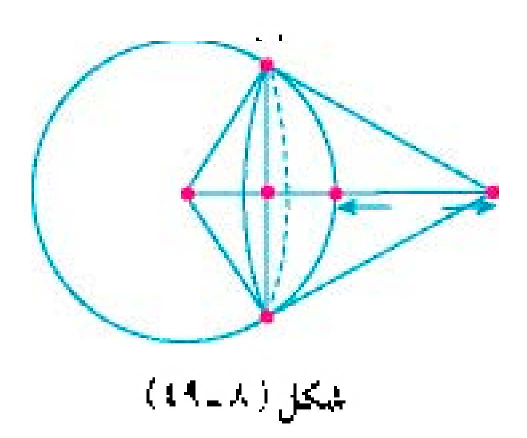
كذلك ارتفاع القبة الصغرى = نق − |م هـ| = ١٣ − ١٢ = ١ سم

فيكون حجم القبة الصغرى = $\frac{ط}{٣}$ (٣٩ − ١) = $\frac{٣٨ط}{٣}$ سم³

إذن حجم القطعة الكروية = $\frac{١٩٤٦ط}{٣}$ سم³.

مثال (٨−١٤)

وضع مصدر للضوء على بعد ١٥ مترًا من كرة نصف قطرها ٧ م. احسب مساحة الجزء المضاء من الكرة (ط = $\frac{٢٢}{٧}$)



شكل (٨ ـ ٤٩)

الحـــل :

(١) الجزء المضاء هو قبة كروية كما في الشكل (٨−٤٩) حيث أ ب، أ جـ مماسان.

ليكن ع هو ارتفاع القبة.

(٢) ∆ أ ب م قائم الزاوية في ب ومن العلاقات المترية في المثلث قائم الزاوية

نجد أن |م ب|² = |م د| × |م أ|

أي ٧² = (٧ − ع) × ٢٢

ينتج ع = $\frac{١٠٥}{٢٢}$ م

إذن (٣) مساحة السطح المضاء = ٢ط نق ع

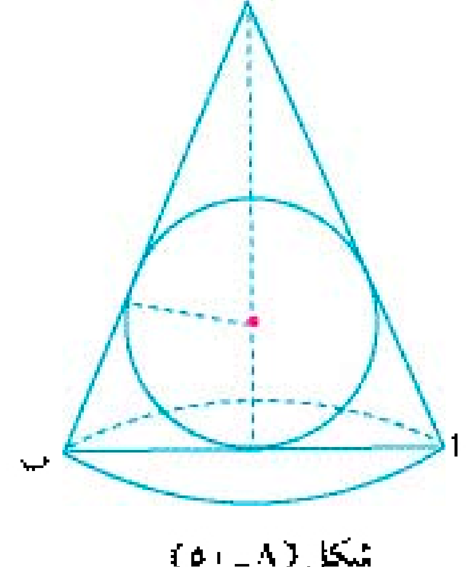
$$= \frac{٢ط \times ٧ \times ١٠٥}{٢٢}$$

$$= ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times \frac{٧}{٢٢} \times ١٠٥$$

$$= ٢١٠ \text{ م}^٢ .$$

مثال (٨-١٥)

الشكل (٨-٥١) لكرة محصورة في مخروط دائري قائم. [أ ب] قطر للقاعدة و حـ رأس المخروط. إذا كان Δ أ ب حـ متطابق الأضلاع، فاحسب حجم المخروط بدلالة نصف قطر الكرة. و ما نسبة مساحة السطح الجانبي للمخروط إلى مساحة الكرة؟



شكل (٨ ـ ٥١)

الحـــل :

(١) لتكن م مركز الكرة و ر نصف قطرها. ولتكن د مركز القاعدة. بما أنَّ أضلاع أ ب حـ متطابقة فإنَّ م هي نقطة التقاء المستقيمات المتوسطة للمثلث وعليه فإن

$$|\text{حـ م}| = ٢ |\text{م د}| = ٢\text{ر} \Leftarrow |\text{حـ د}| = ٣\text{ر}$$

(٢) ع = |أ د| = |حـ د| ظا أ$\hat{\text{حـ}}$د = ٣ر ظا ٣٠°

$$= ٣\text{ر} \times \frac{١}{\sqrt{٣}} = \sqrt{٣}\,\text{ر} .$$

إذن حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ ط ع^٢ ح = $\frac{١}{٣}$ ط . ٣ر^٢ . ٣ر

= ٣ ط $ر^{٢}$.

(٣) طول الراسم = |أ حـ| = ٢ $\sqrt{٣}$ ر

إذن مساحة السطح الجانبي للمخروط = ط ر ل = ط $\sqrt{٣}$ ر . ٢ $\sqrt{٣}$ ر

= ٦ ط $ر^{٢}$

كذلك مساحة الكرة = ٤ ط $ر^{٢}$

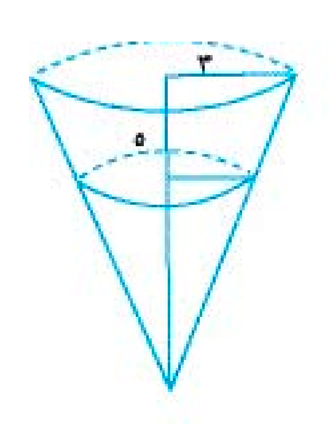
إذن $\frac{\text{مساحة السطح الجانبي للمخروط}}{\text{مساحة الكرة}} = \frac{٣}{٢}$.

تمارين (٨ – ٥)

(١) لأسطوانة دائرية قائمة وكرة الحجم نفسه. إذا كان قطر الكرة يساوي قطر قاعدة الأسطوانة فاحسب ارتفاع الأسطوانة بدلالة قطر الكرة.

(٢) لدينا كرتان قطر الأولى يساوي نصف قطر الثانية. احسب **أولاً** نسبة مساحتي سطحيهما وثانياً نسبة حجميهما.

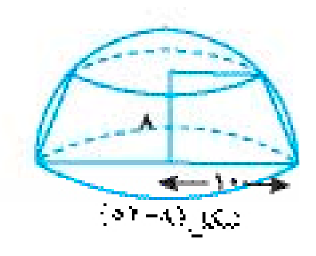
(٣) إذا علمت أن المياه تغطي $\frac{٣}{٤}$ سطح الأرض وأن قطر الأرض يبلغ ١٢٧٤٠ كيلومتر فاحسب مساحة اليابسة على الأرض.



(٤) الشكل (٨-٥١) لكأس على هيئة مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته ٣ سم وارتفاعه ١٥ سم. إذا كان الكأس مملوءاً بالماء حتى عمق ١٠ سم فما حجم الماء؟ لدينا قطع من الثلج على هيئة كرات نصف قطر الواحدة منها ١ سم. ما أكبر عدد يمكن وضعه منها في الكأس من دون أن يتدفق الماء عندما يذوب الثلج؟

(٥) احسب مساحة وحجم قبة كروية ارتفاعها ١ سم ونصف قطر قاعدتها

(٦) احسب مساحة منطقة كروية البعد بين قاعدتيها ٢ سم وقطرها ١٦



شكل (٨-٥٢)

(٧) الشكل (٨-٥٢) يبين نصف كرة قطرها ٢٠ سم حفر فيها مخروط ناقص دائري قائم ارتفاعه ٨ سم. احسب حجم المادة المتبقية.

(٨) علبة على هيئة أسطوانة دائرية قائمة نصف قطر قاعدتها ١٢ سم وارتفاعها ٢٠ سم مليئة بالماء. إذا أدخلنا فيها كرة قطرها ١٨ سم وأخرجناها احسب حجم الماء المتبقي في العلبة.

(٩) حشر متوازي مستطيلات أبعاد قاعدته ١٢ سم، ٢٠ سم في كرة قطرها ٢٨ سم بحيث وقعت جميع الرؤوس على الكرة. احسب حجم الجزء من الكرة خارج متوازي المستطيلات.

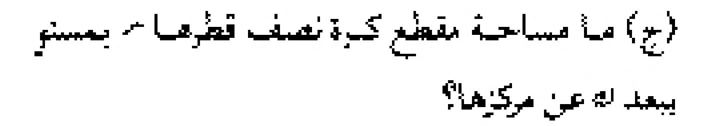
(١٠) في هذا التمرين الطالب مدعو لاستنباط برهان لقانون حجم الكرة من دون استخدام حساب التكامل:

خذ أسطوانة دائرية قطرها ٢ر وارتفاعها ٢ر وأفرغ منها مخروطين قائمين متطابقين ومتقابلين في الرأس كما في الشكل (٨-٥٣).



(أ) ما شكل المقطع بمستوٍ يوازي القاعدتين.

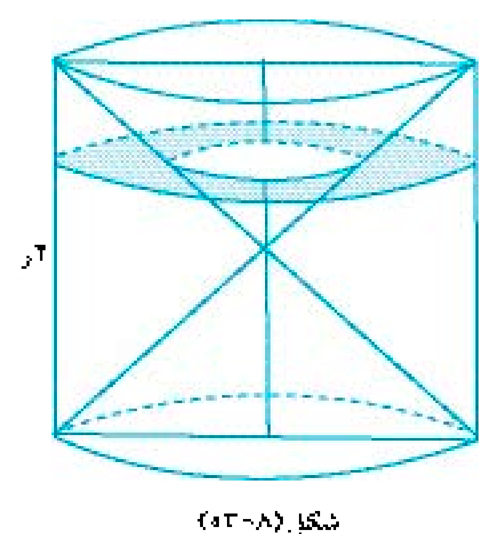
(ب) ما مساحة هذا المقطع إن كان يبعد ل عن نقطة التقاء المخروطين؟



(ج) ما مساحة مقطع كرة نصف قطرها ر بمستوٍ يبعد ل عن مركزها؟

(د) ماذا تستطيع أن تقوله عن حجمي المجسم في (٨-٥٣) والكرة؟

(هـ) أثبت أن حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ ط ر^{٣}.



شكل (٨-٥٣)

تمارين عامة

(١) احسب المساحة الكلية والحجم لكل مما يأتي:

(أ) منشور خماسي منتظم ارتفاعه ١٦سم وطول ضلع قاعدته ٥سم.

(ب) منشور ثماني منتظم طول حرفه ١٠سم وطول ضلع قاعدته ٤سم.

(جـ) منشور ثلاثي قائم ارتفاعه ٩سم وقاعدته مثلث أ ب حـ فيه |أ ب| = ٤سم، |ب حـ| = ٦سم، ق(∠أ ب حـ) = ٦٠°.

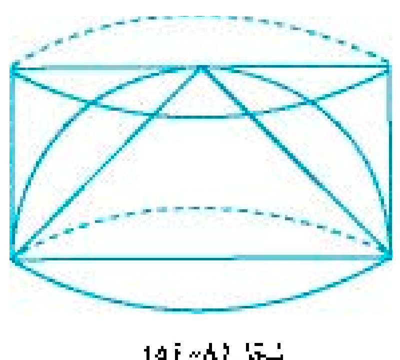
(٢) أ ب حـ أَ بَ حـَ منشور ثلاثي مائل فيه أحـ ⊥ حـ حـَ، |أأَ| = ٨سم، |أحـ| = ٦سم، أ ء ⊥ ب بَ حيث ء ∈ ب بَ. إذا كان |أ ء| = ٨سم، |حـ ء| = ١٠سم فاحسب أولاً: المساحة الجانبية للمنشور، ثانياً: حجمه.

(٣) إذا كانت مساحتا قاعدتي هرم ناقص ٤٠٠سم²، ٩٠٠سم² وكان حجمه ٥٧٠٠سم³ فما ارتفاعه؟ إذا أكمل الهرم كم يكون ارتفاعه وما حجمه؟

(٤) م أ ب حـ ء هرم رباعي قائم ارتفاعه ٤√٣سم وطول حرفه الجانبي ٤√٥سم. احسب أولاً: مساحته الجانبية، ثانياً: حجمه، ثالثاً: قياس الزاوية بين الحرف الجانبي ومستوى القاعدة.

(٥) إذا قطعت مخروطاً دائرياً قائماً بمستويين يوازيان القاعدة ويقسمان الارتفاع إلى ثلاثة أقسام متساوية، فأثبت أن النسبة بين أحجام الأجزاء الثلاثة هي ١ : ٧ : ١٩.

(٦) الشكل (٨-١٥٤) لأسطوانة ونصف كرة لها القاعدة والارتفاع أنفسهما ومخروط رأسه في مركز إحدى قاعدتي الأسطوانة وقاعدته تنطبق على القاعدة الأخرى. أثبت أن حجم المخروط : حجم نصف الكرة : حجم الأسطوانة = ١ : ٢ : ٣.



شكل (٨-١٥٤)

(٧) إذا كانت مساحة قبة كروية تساوي المساحة الجانبية لمخروط دائري قائم قاعدته هي قاعدة القبة ورأسه مركز الكرة فأثبت أنّ نسبة ارتفاع القبة إلى ارتفاع المخروط هي ٢ : ٣.

(٨) تمر كرة برأس ومحيط قاعدة مخروط دائري قائم. إذا كان نصف قطر الكرة يساوي $\frac{٧}{٨}$ طول راسم المخروط فاحسب أولاً: نسبة مساحة سطح المخروط الجانبي إلى مساحة الكرة، ثانياً: نسبة حجم المخروط إلى حجم الكرة.

(٩) في مجسم كروي فيه يحفر ثقب على شكل أسطوانة دائرية قائمة محورها أحد أقطار الكرة. إذا كان طول الثقب ٢سم فأثبت أنّ حجم ما بقي من المجسم هو $\frac{٤ط\ سم^٣}{٣}$.

(١٠) احسب حجم أكبر مخروط دائري قائم يمكن حصره في كرة نصف قطرها نق.

(١١) مخروط دوراني (دائري قائم) نصف قطر قاعدته ٥ سم، وارتفاعه $\frac{٢٠}{٣}$ سم.

١ - احسب نصف قطر الكرة التي تمس قاعدة المخروط في مركزها وتمس سطحه الجانبي داخلاً.

٢ - أثبت أنّ نصف قطر دائرة تماس هذه الكرة مع المخروط يساوي ٢ سم.

٣ - احسب حجم المخروط الناقص الذي قاعدتاه:

قاعدة المخروط ودائرة تماسه مع الكرة.

(١٢) دائرة مركزها م ونصف قطرها ٢√٥ سم، تمس داخلياً أضلاع المثلث ب حـ ء المتطابق الأضلاع في النقط هـ ، ط ، ن (هـ ∈ [ب حـ]، ط ∈ [ب ء]).

ترسم من م عموداً على مستوي الدائرة ونعين عليه النقطة ؟ بحيث |م ؟| = ٢√٥ سم.

والمطلوب:

١ - أثبت أن أ ب ⊥ ء حـ ، ثم احسب الحجم المحصور بين الهرم الذي رأسه أ وقاعدته المثلث ب حـ ء والمخروط الذي رأسه أ وقاعدته الدائرة م .

٢ - أثبت أن النقط أ ، م ، ط ، هـ ، ب تقع على سطح كرة واحدة ، عيّن مركزها ونصف قطرها .

٣ - احسب نصف قطر الدائرة التي تمر برءوس المثلث أ هـ ط ، ثم احسب حجم القبة الكروية الصغرى الناتجة من قطع الكرة السابقة بمستوي المثلث أ هـ ط .

(١٣) ب حـ هـ ء بَ حَ هَ ءَ موشور مائل قاعدته السفلى ب حـ هـ ء شبه منحرف متطابق الساقين ، ضلعاه المتوازيان : [ب حـ] ، [هـ ء] ، طولاهما : ل ، ٢ل على الترتيب ، والوجه ب حـ حَ بَ مستطيل والحرف [ب بَ] طوله ٢ل ويميل على مستوي القاعدة بزاوية مقدارها (٦٠°) والمسقط القائم للرأس بَ على المستوي ب حـ هـ ء يقع على هـ ء . والمطلوب :

(أ) احسب حجم هذا الموشور بدلالة ل .

(ب) نرسم مقطعاً قائماً هـ ء أ و ، احسب مساحة هذا المقطع القائم وبرهن أنه شبه منحرف متطابق الساقين ، ثم احسب زاوية القياس للثنائية التي وجهاها : هـ ء ب حـ ، هـ ء أ و .

(ج) احسب المساحة الكلية للموشور المفروض .

إجابات بعض تمارين الكتاب

الباب الخامس

تمارين (٥ – ١)

(١) العظمى : $\frac{١٩}{٦}$ عند س = – $\frac{١}{٦}$ ، الصغرى : –٥٤ عند س = –٣

(٢) العظمى : ١٥ عند س = ٠ ، الصغرى : –١ عند س = ٤

(٣) العظمى : ٧ عند س = ٣ ، الصغرى : –٩ عند س = –١

(٤) العظمى : ٨ عند س = –١ ، الصغرى : –١٢ عند س = ١

(٥) العظمى : $\frac{١}{٤}$ عند س = ١ ، الصغرى : ٢ عند س = ٠ ، س = ٢

(٦) العظمى : ١ عند س = ١ ، الصغرى : –٥ عند س = –١

(٧) $\frac{٥}{٣}$ ، –٢ ، (٨) صفر ، (٩) $\sqrt{٢}$ ، –$\sqrt{٢}$ ، ٠ .

(١٠) ٠ ، $\frac{٨}{٥}$ ، (١١) ٠ ، $\frac{٦}{٧}$ ، ١ .

تمارين (٥ – ٣)

(١) ٢ ، (٢) –$\frac{١}{٣}$ ، (٣) ٠ ، $\frac{١}{٢\sqrt{٢}}$ – $\frac{١}{٢\sqrt{٢}}$ ، (٤) ٣ ، (٥) $\frac{ج}{٢}$ ، (٦) ٣

(٧) ١ ، (٨) ٢ – $\sqrt{٣}$ ، (٩) $\frac{٣}{٢}$ ، (١٠) ١ ، (١١) ٠ ، (١٢) $\frac{١}{٢}$.

تمارين (٥ – ٥)

(١) (–٣ ، ٠) ، (٢) (٠ ، ١) ، (٢ ، ١٦) ، (٣) {٢ ، –٥} ، (٤) {–$\frac{١}{٤}$ ، د(–$\frac{١}{٤}$)} ،

{١ ، د(١)} ، (٦) {$\frac{ط}{٢}$ ، ٠} ، (٧) (٠ ، ٠) ، (٩) –٢ ، ٣ ، ١٢ .

تمارين (٥ – ٦)

(١) {١ ، ٦} ، (٢) {١ ، −١} ، {٣ ، −٣} ، (٣) {٤ ، −٦٨} ، {−٢ ، ٤} ،

(٤) {١ ، −٢٧} ، (٥) {−١ ، ٠} ، (٦) {−١ ، −$\frac{١}{٢}$} ، {١ ، $\frac{١}{٢}$} ،

(٨) {١ ، ٦} ، {٣ ، ٦} ، (٩) {−٢ ، −٣٢} ، {٢ ، ٣٢} ، (١٠) {٠ ، ٠} ، {١ ، −٥}

(١١) {$\frac{ط}{٤}$ ، $\sqrt{٢}$} ، {$\frac{٥ط}{٤}$ ، −$\sqrt{٢}$} ، (١٢) {$\frac{ط}{٢}$ ، ٣}.

تمارين (٥ – ٩)

(١) $\frac{ص}{٤}$ ، $\frac{س}{٤}$ ، (٢) ٢٠ ، ٢٠ ، (٣) ١ ، $\sqrt{٢}$ ، ١ ، $\sqrt{٢}$ ، (٤) ٤ر ، ٣ر ، (٥) $\frac{ط}{٣}$ ،

(٦) $\frac{٢س}{\sqrt{٢}}$ ، $\frac{س}{\sqrt{٢}}$ ، (٧) $\frac{٨}{٣}$ ، $\frac{٤}{\sqrt{٣}}$ ، (٨) {٣ ، ٢} ، {٦ ، ٠} ، (٩) {$\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{٣}{٤}$} ،

(١٠) $\sqrt{٢}$ س ، (١١) $\sqrt{١٨}$ ر ، (١٢) {١ ، ٢} ، (١٣) $\frac{٤ط}{ط + ٤}$

التمارين العامة

(٣) ٩ ، $-\frac{٩}{٨}$ ؛ (٤) $\frac{٥}{٤}$ ؛ (٥) ١ ، $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$ ؛ (٦) ٢ط ، ٨ + ٢ط ؛ (٧) {٢ ، ٤}

الباب السادس

(١) $\frac{٤}{٣}(س - ٢)^{\frac{٣}{٢}} + \frac{٢}{٥}(س - ٢)^{\frac{٥}{٢}} + ث$

(٢) $\frac{٢}{٣}(س - ١)^{\frac{٣}{٢}} + \frac{٤}{٥}(س - ١)^{\frac{٥}{٢}} - \frac{١}{٧}(س - ١)^{\frac{٧}{٢}} + ث$

(٤) $-\frac{١}{٢(٢س + ١)} + ث$.

تمارين (٦ – ٣)

(١) (أ) $ص = ٢س^٢ + ٣$ ، (ب) $ص = \frac{١}{٣}(س - ١)^٣ - \frac{٨}{٣}$

(ج) $ص = \frac{٢}{٣}\sqrt{س^٣}$ ، (د) $ص = -\frac{١}{س} + ٣$

(٢) $ص = -٥س^٢ + ٨$ ، (٣) $ص = \frac{٢}{٣}س^٣ - \frac{١}{٢}س^٢ - ٣\frac{١}{٦}$

(٤) $ص = س^٣ + س^٢ + ٥س + ١٠$ ، (٥) $ص = ٢ - س^٢$

(٦) $ص = س^٢ + ٦س - ١٠$ ؛ (٨) $ق = ن^٣ - ٣ن^٢ + ٦ن + ٢٠$

(٩) $ق = ٢ن^٣ - \frac{٣}{٢}ن^٢ + ٨ن$.

تمارين (٦ – ٥)

(١) −٢ ؛ (٢) $\frac{1}{2}$ ؛ (٣) ٢ ، (٤) ٨ ، (٥) ٠ ، (٦) ١٢ ، (٧) $\frac{2}{3}$ ١٣ ،
(٨) −١٦ ، (٩) $\frac{3}{2}$ ، $\sqrt{7}$ ، $\frac{4}{3\sqrt{7}}$ ، ٢ .

تمارين (٦ – ٦)

(١) ١٤ ، (٢) ٤ ، (٣) ٨ ، (٤) ٠ ، (٥) ١٩٢ ، (٦) ٣٢ ، (٧) ٧٥ ، (٨) ٢٤ ؛
(٩) $\frac{43}{15}$ ٧ ، (١٠) ٠ ، (١١) $\frac{1}{3}$ ٤١ ، (١٢) −٤ ، (١٣) ٦٠ ، (١٤) ٢٠٠ ؛
(١٥) $\frac{14}{3}$ ، (١٩) $\frac{2}{3}$ ، (٢٠) −١ ، (٢١) ٢٠٠ ، (٢٢) ٠ ، (٢٣) $\frac{13}{3}$ ؛
(٢٤) ٠ ، (٢٥) −٣٢ ، (٢٧) $\frac{28}{6}$ ، (٣٠) $\frac{4}{3}$.

التمارين العامة :

(١٠) $\frac{1}{2}$ ١٢ ، $\frac{1}{2}$ ٨ ، $\frac{1}{2}$ ٦ ؛ (١١) $\frac{130}{6}$ ، (١٢) $\frac{7}{2}$ ، (١٣) ٢٥٦ ،
(١٤) $\frac{32}{3}$ ، (١٥) ≈ ٧ ، (١٦) −$\frac{5}{12}$ ، (١٧) $\frac{3}{4}$ ٢١ ، (١٨) ≈ ٢,٧ ،
(١٩) ٨ ، (٢٠) $\frac{22}{3}$ ، (٢١) ٢ ، (٢٢) $\frac{284}{7}$ ، (٢٤) ≈ ٦,٩ ، (٢٥) $\frac{-4}{15}$ ؛
(٢٦) ≈ ٥,٢٧ ، (٢٧) $\frac{-27}{2}$ ، (٢٨) $\frac{1}{3}$ ، (٢٩) ≈ ٢,٩ ، (٣٣) = ٦٠ ، (٣٤) ٠ .

الباب السابع

تمارين (٧ – ١)

التمارين من (١) إلى (٢٠) على الترتيب

٢٠ ، ٢١ ، ٢٠ ، $\frac{5}{2}$ ، ٥ ، ٨ ، $\frac{4}{3}$ ، $\frac{80}{3}$ ، $\frac{38}{6}$ ، ٤٥ ، ١٦ ، ٢٨ ، ٢٨ ، $\frac{37}{12}$ ،

$\frac{٢٦}{٣}$ ، ٤ ، $\frac{١٣}{٣}$ ، ١ ، $\frac{١}{١٥}$ ، $\frac{٢}{٣}$ $(٢\sqrt{٢} - ١)$.

(٢١) $\frac{٩}{٢}$ ؛ (٢٢) $\frac{٤}{٣}$ ، (٢٣) $\sqrt{٢} - ١$ ؛ (٢٤) $\sqrt{٦٦}$ ، (٢٥) $\frac{٦٣}{٢٠}$ ؛ (٢٢) ٤ .

تمارين (٧ – ٢)

(١) ٢٣ ، (٢) $\frac{-٢٢}{٦}$ ، (٣) $\frac{٨}{٣}$ ؛ (٤) ١٥٦,٥٨ .

تمارين (٧ – ٣)

(١) ٩ط ، (٢) $\frac{١٥٢}{٣}$ ط ؛ (٣) $\frac{٨}{١٠٥}$ ط ؛ (٤) $\frac{٨٤٣}{٥}$ ط ، (٥) $\frac{٣٢}{٥}$ ط ؛ (٦) $\frac{١٦}{١٥}$ ط

(٧) $\frac{٦٤}{٥}$ ط ، (٨) $\frac{٢٢٤ \sqrt{٢} [illegible]}{١٥}$ ط ؛ (٩) $\frac{ط}{٣٠}$ ؛ (١٠) $\frac{٨}{٣}$ ط ، (١١) $\frac{ط^{٢}}{٢}$ ؛ (١٢) $\frac{٥٦}{١٥}$ ط

(١٣) $\frac{٢}{١٥}$ ط ؛ (١٤) $\frac{٥١٢}{٣}$ ط ، (١٥) $\frac{ط^{٢} ١}{٢}$ ؛ (١٦) $\frac{٦٥٥٣٦}{١٥}$ ط ؛ (١٧) $\frac{ط}{٢}$ ، (١٨) $\frac{ط^{٢}}{٤}$.

تمارين (٧ – ٥)

(٧) لو $\frac{٧}{٥}$ ؛ (٨) لو ٢ ؛ (٩) لو $\frac{٢}{٣}$ ، (١٠) لو ٥ ، (١١) لو $\frac{ط}{٢}$ ؛

(١٢) لو $\left| \left(\frac{ط}{٤}\right)^{٢} - \text{جتا} \left(\frac{ط}{٢}\right)^{٢} \right|$ ؛ (١٣) لو ٢ ، (٢٣) $-\frac{١}{٢}$ ، $\frac{هـ^{-٢}}{لو ٥}$ + ث

(٢٤) $\frac{٢^{س+١} [illegible]}{٣ لو ٢}$ + ث ، (٢٥) $\frac{٣^{هـ}}{٢ لو ٣}$ + ث

(٢٦) $\frac{٢ \times ١٠^{[illegible]}}{لو ١٠}$ + ث ، (٢٧) $\frac{٢٨}{لو ٢}$.

التمارين العامة :

(١) $\frac{٧٣}{٦}$ ، (٢) $\frac{٣٢}{٣}$ ، (٣) $\frac{٣٩}{٣}$ ، (٤) ٢ ، (٥) ٩

(٦) ٥ ، (٧) $\frac{٨٢}{٣}$ ، (٨) ٨ط ، (٩) [illegible] ، (١٠) $\frac{٣٦}{٥}$ ط ، (١١) $\frac{٤}{٣}$ ط [illegible].

الباب الثامن :

تمارين (٨ – ١)

(٣) [illegible] ، ١١,٧٢ ، [illegible] ، ١٤,٨٢٨ [illegible]

(٤) ١٥٩٤,٠٣٥ ، (٥) ٣٠ ، (٦) ٣٥٢ ، (٧) ٢٧٠,٥٨٧ ،

(٨) ٧٨ ، (٩) ١٢ (١١ – ٤ $\sqrt{٣}$)

تمارين (٨ – ٢)

(١) ١٤٤ ، (٢) ٦٠٠ ، ٦٢٠ ، (٣) ٨,٨٤ ، ٨٨٠٨ ، ٨٨٤ ، ٨٠ ، ٢٤٨

(٤) ١٢ ، (٥) ٣٠ ، (٦) ١٤٤ ، (٧) ٤١٠ ، (٨) ٢٥

تمارين (٨ – ٣)

(١) $\frac{١}{٢}$ ن (ع + ع) ، (٢) ٧٠ $\sqrt{٥}$ ، (٣) ١٢٨

(٤) ٣٣٣,٥٧٣ ، (٥) ٤ ، ٤٨ $\sqrt{٣}$ ، ٣٩ (٧ + $\sqrt{٣}$)

(٦) $\frac{١}{٩}$ [illegible] ، (٧) ٧٢ $\sqrt{٣}$ ، (٨) ١٩٢ ، (٩) ٩ : ٨

(١٠) ٦٢٨,٤ ، (١١) ٣ $\sqrt{٣}$ ، (١٢) ٨٤٠ ، ١٢٤٨ ، ١٢.

تمارين (٨ – ٤)

(٢) ١٧٥٠٠ ط ؛ (٣) $\sqrt[3]{\frac{٦٨٦ ط ع^{٢}}{٩}}$ ، (٤) ٥٨٥٢ ، ١٦٧٢

(٥) $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{ص}{س}$ ؛ (٦) ٣٢٠ ط ، ١٢٦ ط ؛ (٧) $\frac{٢٥٠}{٣}$ ط $\sqrt{٢}$ ؛

(٨) ٣٠° ؛ (٩) $\frac{\sqrt{٣}}{١٠}$ ط ؛ (١٠) ٩٤,٧١ .

تمارين (٨ – ٥)

(١) $\frac{٢س^{٢}}{٣}$ ؛ (٢) ٤٠٩٦ ٠٠٠ ٠٠٠ ط ؛ (٤) ٢٣ ؛ (٥) $\frac{٣٨}{٣}$ ط ؛

(٦) ٤٠ ط ؛ (٧) ١٤٤ ط ؛ (٨) ١٩٠,٨ ط ؛ (٩) ١٤٩,٧٧٧ ؛ (١٠) $\frac{٤}{٣}$ ط سم^{٣}

التمارين العامة :

(١) ٦٨٨,١٩١ ، ٧٧٢,٥٤٨ ، ٥٤ $\sqrt{٣}$

(٢) ١٩١ ؛ (٣) ٨١٠٠ ؛ (٤) ١٢٨ ، ٤٧° ٥٠' ؛ (٥) ١ : ٧ : ١٩

(٦) ١ : ٢ : ٣ ؛ (٧) ٢ : ٣ ؛ (٨) ٨ : ٢٧ ؛ (٩) $\frac{٤ط س^{٣}}{٣}$ ؛ (١٠) $\frac{٣٢}{٨١}$ ط سم^{٣} .

شركة المطابع الأهلية للأوفست المحدودة
National Offset Printing Press Ltd. Co.
الرياض - المملكة العربية السعودية